

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

E. A. P. INGENIERÍA MECÁNICA DE FLUIDOS

**Simulación fluidodinámica alrededor de un perfil
NACA mediante el método de volúmenes finitos**

Tesis

para optar el título de Ingeniero Mecánico de Fluidos

AUTOR

Juan José Guillermo Navarro

Lima-Perú

2006

A los hombres que viven extinguiéndose,
porque esos son los que pasan al otro lado.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas las personas que estuvieron conmigo durante este trabajo y otras que no estuvieron pero fueron muy importantes, especialmente:

- A los Profesores Cesar J. Quispe Apaclla, Miguel A. Ormeño por el apoyo y la orientación, en el desarrollo de este trabajo.
- A mis padres, por todo lo que soy, por el cariño, y comprensión.
- A mis hermanas, por el cariño y apoyo.
- A mis sobrinos por alegrar mi vida y la de mi familia.
- A mis amigos que siempre confiaron en mí a los cuales respeto y admiro.

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
RESUMEN.....	iv
ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE FIGURAS.....	ix
ÍNDICE DE TABLAS	xvii
I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Aspectos Generales	1
1.2 Dinámica De Fluidos Computacional	3
1.3 Aspectos Históricos De La DFC	5
1.4 Aplicación De La DFC	8
1.5 Programas Para DFC.....	10
II. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN Y NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DE GOBIERNO	12
2.1 Ecuaciones De Gobierno	12
2.2 Condiciones De Contorno Y Condiciones Iniciales	14
2.3 Discretización De Las Ecuaciones	15
2.4 Métodos De Discretización	15
2.4.1 Método de las diferencias finitas	16
2.4.2 Método de los elementos finitos	16
2.4.3 Método de los volúmenes finitos	17
III. MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS	19
3.1 Introducción	19

3.2	Solución Numérica De La Conducción De Calor Mediante El Método De Volúmenes Finitos	23
3.2.1	Conducción unidimensional en estado estable	24
3.2.2	Conducción bidimensional en estado estable	32
3.2.3	Conducción unidimensional en estado transitorio	41
3.2.4	Conducción bidimensional en estado transitorio	48
3.3	Resultados Numéricos	55
3.3.1	Cálculo para la conducción en estado estable (1D)	56
3.3.2	Cálculo para la conducción en estado estable (2D)	59
3.3.3	Cálculo para la conducción en estado transitorio (1D)	65
3.3.4	Cálculo para la conducción en estado transitorio (2D)	67
IV.	CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES DE AERODINÁMICA	74
4.1	Definición De Aerodinámica	74
4.2	Perfil Alar	74
4.2.1	Terminología	74
4.2.2	Variables geométricas en los perfiles	75
4.2.3	Clasificación de los perfiles	76
4.3	Fuerzas Que Actúan En Vuelo	77
4.3.1	Sustentación	78
4.3.2	Peso	81
4.3.3	Empuje o tracción	81
4.3.4	Resistencia	82
V.	GENERACIÓN DE MALLAS	89
5.1	Introducción	89
5.2	Concepto De Malla	89
5.3	Tipos De Mallas	89
5.3.1	Malla estructurada	90
5.3.2	Malla no – estructurada	91

5.4	Aplicaciones	91
5.5	Triangulación De Delaunay	93
5.5.1	Caracterización de la triangulación de Delaunay	93
5.5.2	Algoritmo Delaunay	95
5.6	Triangulación De Un Polígono Convexo.....	100
5.6.1	Algoritmo Coercitum	101
5.6.2	Punto en el polígono	112
5.7	PHITA - 10X.....	117
5.7.1	Presentación del programa	117
5.7.2	Uso del programa	117
5.7.3	Proceso	118
VI.	ANÁLISIS DE UN PERFIL NACA MEDIANTE EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS	122
6.1	Introducción	122
6.2	Fases Para La Solución Numérica	122
6.3	Problema Físico	124
6.4	Modelamiento Matemático	125
6.4.1	Introducción	125
6.4.2	Forma diferencial de la ecuación de conservación	126
6.4.3	Ecuación de continuidad	127
6.4.4	Ecuación de cantidad de movimiento	128
6.4.5	Ecuación de la energía	133
6.5	Modelamiento Numérico	134
6.5.1	Discretización de la ecuación general de transporte	134
6.5.2	Discretización de la ecuación de movimiento en la dirección X	142
6.5.3	Discretización de la ecuación de movimiento en la dirección Y	147
6.5.4	Discretización de la ecuación de continuidad	153
6.6	Algoritmo SIMPLE	157
6.7	Sistema De Ecuaciones	163

6.8	Software THAYA - 10X	165
6.8.1	THAYA - 10X	165
6.8.2	Objetivos	166
6.8.3	Beneficios del software THAYA - 10X	167
6.8.4	Requisitos de hardware	168
6.8.5	Requisitos de software	169
6.8.6	Uso del software	169
6.9	Proceso	171
6.10	Análisis De Los Resultados	172
VII.	CONCLUSIONES	203
7.1	Recomendaciones Para Trabajos Futuros	205
VIII.	BIBLIOGRAFIA	207
A N E X O S		211
Anexo A : Algoritmo TDMA		212
Anexo B : Cálculo De La Velocidad Máxima En Un Óvalo De Rankine		218

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Fig.3.1-Volumen de control finito en una configuración bidimensional.	21
Fig.3.2-Dominio unidimensional.	25
Fig.3.3-Volumen de control unidimensional.	26
Fig.3.4-Malla computacional 2D (MVF)	33
Fig.3.5-Malla computacional 2D (MDF)	33
Fig.3.6-Malla bidimensional.	34
Fig.3.7-Presentación en pantalla del programa C1E.	56
Fig.3.8-Comparación de los resultados numéricos con la solución analítica.	59
Fig.3.9-Presentación en pantalla del programa C2E.	60
Fig.3.10-Distribución de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos.	61
Fig.3.11-Distribución de temperaturas obtenido mediante el método analítico.	62
Fig.3.12-Distribución de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB.	62
Fig.3.13-Contorno de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos.	63
Fig.3.14-Contorno de temperaturas obtenido mediante el método analítico.	64

Fig.3.15-Contorno de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB	64
Fig.3.16-Presentación en pantalla del programa C1T.	65
Fig.3.17-Comparación de los resultados numéricos con la solución analítica.	67
Fig.3.18-Presentación en pantalla del programa C2T.	68
Fig.3.19-Distribución de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=1$ Seg.	69
Fig.3.20-Distribución de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=20$ Seg.	69
Fig.3.21-Distribución de temperaturas, obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=1$ Seg.	70
Fig.3.22-Distribución de temperaturas, obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=20$ Seg.	70
Fig.3.23-Contorno de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=1$ seg.	71
Fig.3.24-Contorno de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=20$ seg.	72
Fig.3.25-Contornos de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=1$ seg.	72
Fig.3.26-Contornos de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=20$ seg.	73
Fig.4.1-Perfil alar.	75

Fig.4.2-Perfil NACA 0012.....	76
Fig.4.3 -Perfil NACA 0024.	77
Fig.4.4-Perfil NACA 4415.	77
Fig.4.5-Fuerzas que actúan en vuelo.	78
Fig.4.6-Coeficiente de sustentación vs. ángulo de ataque.	80
Fig.4.7-Dirección y sentido del empuje.	82
Fig.4.8-Dirección y sentido de la resistencia.	83
Fig.4.9-Resistencia inducida.	84
Fig.4.10-Variación de la resistencia con la velocidad.	85
Fig.4.11-Variación de la sustentación con el ángulo de ataque.	85
Fig.4.12-Resistencia parásita vs. velocidad.	86
Fig.4.13-Resistencia total	87
Fig.5.1-Malla estructurada uniforme.	90
Fig.5.2-Malla estructurada no uniforme.	90
Fig.5.3-Malla no – estructurada.	91
Fig.5.4-Utilización de mallas para modelamiento topográfico.	92
Fig.5.5-Utilización de mallas en computación gráfica.	92
Fig.5.6-Utilización de mallas para modelamiento geológico.	92
Fig.5.7-Utilización de mallas para modelamiento estructural.	93

Fig.5.8-Puntos pertenecientes al conjunto de puntos P	94
Fig.5.9-Puntos pertenecientes a P	94
Fig.5.10-Intercambio de aristas.	95
Fig.5.11-Nube de puntos contenida en el triangulo $P_1P_2P_3$	96
Fig.5.12- P_r localizado en el interior del triangulo $P_iP_jP_k$	97
Fig.5.13- P_r localizado en uno de los lados del triangulo $P_iP_jP_k$	98
Fig.5.14-Polígono convexo.	101
Fig.5.15-Malla preliminar que contiene al polígono convexo.	102
Fig.5.16-Malla refinada.	102
Fig.5.17-Puntos del contorno de la malla.	104
Fig.5.18-Vector Norte.	104
Fig.5.19-Vector Sur.	104
Fig.5.20-Vector Este.	105
Fig.5.21-Vector Oeste.	105
Fig.5.22-Matriz interna.	106
Fig.5.23-Generación de la primera columna.	108
Fig.5.24-Generación de la segunda columna.	108
Fig.5.25-Generación de la enésima columna.	109

Fig.5.26-Generación de la primera fila.	111
Fig.5.27-Generación de la segunda fila.	111
Fig.5.28-Generación de la enésima fila.	112
Fig.5.29-Punto interno, número de intersecciones impar.	113
Fig.5.30-Punto externo, número de intersecciones par.	113
Fig.5.31-Semirecta \overrightarrow{QR} por el vértice del polígono.	114
Fig.5.32-Semirecta \overrightarrow{QR} por uno de los lados del polígono.	114
Fig.5.33-Punto en uno de los lados del polígono.	115
Fig.5.34-Semirecta \overrightarrow{QR} por el vértice del polígono.	115
Fig.5.35-Intersección de segmentos.	117
Fig.5.36-Generación de objeto a ser discretizado.	119
Fig.5.37-Generación de malla preliminar.	119
Fig.5.38-Refinamiento de malla.	120
Fig.5.39-Malla finiquitada mediante triangulación Delaunay.	120
Fig.5.40-Malla opcional generada por PHITA – 10X.	121
Fig.6.1-Etapas para la obtención de la solución numérica de un problema de fluidos.	124
Fig.6.2-Representación esquemática de un perfil aerodinámico indicando los principales parámetros geométricos.	125

Fig.6.3-Volumen de control.	135
Fig.6.4-Volumen de control deslocalizado para la velocidad u (MVF)	143
Fig.6.5-Volumen de control deslocalizado para la velocidad u (MDF)	144
Fig.6.6-Volumen de control deslocalizado para la velocidad v (MVF)	149
Fig.6.7-Volumen de control deslocalizado para la velocidad v (MDF)	150
Fig.6.8-Volumen de control deslocalizado en forma atrasada.	154
Fig.6.9-Diagrama del algoritmo SIMPLE.....	162
Fig.6.10-TDMA a lo largo de una única línea.	163
Fig.6.11-TDMA a lo largo del Zigzag.	164
Fig.6.12-Malla computacional.	170
Fig.6.13-Software THAYA - 10X.	170
Fig.6.14-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 4^0, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	173
Fig.6.15-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 0^0, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	174
Fig.6.16-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 4^0, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	174
Fig.6.17-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 6^0, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	175
Fig.6.18-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 8^0, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	175
Fig.6.19-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 10^0, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	176

Fig.6.20-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 12^\circ, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	176
Fig.6.21-Relación de parámetros geométricos - velocidades en el ovalo de Rankine. Fuente Frank M. White, Mecánica de Fluidos, Ed. McGraw-Gil, 1979.	178
Fig.6.22-Contornos de velocidad ($M=0.15, \alpha = 0^\circ, Re_c=3.42 \times 10^6$)	179
Fig.6.23-Contornos de velocidad ($M=0.8, \alpha = 4^\circ, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	180
Fig.6.24-Contornos de velocidad cerca a la pared.	181
Fig.6.25-Contornos de presión ($M=0.8, \alpha = 0^\circ, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	182
Fig.6.26-Contornos de presión ($M=0.8, \alpha = 4^\circ, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	182
Fig.6.27-Contornos de presión ($M=0.8, \alpha = 8^\circ, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	183
Fig.6.28-Contornos de presión ($M=0.8, \alpha = 12^\circ, Re_c=1.8259 \times 10^7$)	183
Fig.6.29-Contornos de presión ($M=0.15, \alpha = 0^\circ, Re_c=3.42 \times 10^6$)	186
Fig.6.30-Flujo alrededor de un perfil transónico. Fuente Arnold M. Kuethe, Chuen-Yen Chow, Foundations of Aerodynamics, Ed. J. Wiley, 1998.	187
Fig.6.31-Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 0.70.....	188
Fig.6.32-Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 0.90.....	188
Fig.6.33-Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 0.95.....	189
Fig.6.34-Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 1.05.....	189
Fig.6.35-Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 1.30.....	190

Fig.6.36-Contornos de temperatura en un perfil a Mach 0.8	193
Fig.6.37-Ubicación de la temperatura en el perfil. (x,y,t)=(0.0437, 0.0335, 332.289)	193
Fig.6.38-Contornos de temperatura en un perfil a Mach 1.8.	195
Fig.6.39-Ubicación de la temperatura en el perfil (x,y,t)=(0.2500, 0.0594, 470.2205)	195
Fig.6.40-Variación del coeficiente de presión obtenido por W. Kyle Anderson	197
Fig.6.41-Variación del coeficiente de presión obtenido mediante el software THAYA-10X.	197
Fig.6.42-Variación del coeficiente de presión obtenido por Henry E. Jones.	198
Fig.6.43-Variación del coeficiente de presión obtenido mediante el software THAYA-10X.	199
Fig.6.44-Contornos de número de Mach. ($M=0.8$, $\alpha = 1.25^0$, $Re_c=1.8259 \times 10^7$) ..	200
Fig.6.45-Contornos de número de Mach obtenidos mediante el software THAYA – 10X.	200
Fig.6.46-Contornos de presión. ($M=0.8$, $\alpha = 1.25^0$, $Re_c=1.8259 \times 10^7$)	201
Fig.6.47-Contornos de presión obtenidos mediante el software THAYA - 10X	202
Fig.B.1- Óvalo de Rankine	218
Fig.B.2- Puntos de análisis en el Óvalo de Ranking	220

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 3.1- Distribución de temperaturas en la barra en estado estable	58
Tabla 3.2- Distribución de temperaturas en la barra en estado transitorio.....	66
Tabla 6.1- Requisitos de hardware	168
Tabla 6.2- Requisitos de software.....	169

RESUMEN

Este trabajo de iniciación científica consiste en el análisis fluidodinámico sobre un perfil NACA 0012 utilizando simulación numérica, específicamente la técnica de los volúmenes finitos. Se busca con esto determinar características como campo de velocidades, presión, temperatura, etc., en diferentes condiciones.

El presente trabajo, propone la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan un flujo de fluidos a través de una metodología similar a la metodología CVFEM (Control Volume Based Finite Element Method). Para la obtención de la solución segregada de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la ecuación de conservación de masa que genera el problema de acoplamiento Presión – Velocidad. Para tratar este acoplamiento se usó el método SIMPLE.

Para obtener los volúmenes de control elementales a partir de una malla No – Estructurada se dispone del método de las mediatrices, donde los volúmenes son generados a partir de una triangulación. Estos volúmenes son denominados volúmenes o diagramas de Voronoi.

Para implementar todos los aspectos numéricos citados anteriormente se desarrollaron tres programas computacionales:

THAYA-10X, es un programa que no solo me permite analizar un perfil NACA sino cualquier objeto, trabajando de esta manera como un túnel de viento virtual.

PHITA-10X, es un programa desarrollado para generar mallas No - Estructuradas mediante los diagramas de Voronoi.

RUPAY-10X, programa que me simula la conducción de calor en estado transitorio.

Para finalizar se llevó a cabo un exhaustivo proceso de validación de los resultados frente a valores experimentales, teóricos y numéricos.

CAPITULO I

I- INTRODUCCIÓN

1.1- Aspectos Generales

El estudio del movimiento de los fluidos es una actividad que viene siendo desarrollada hace muchos siglos. Arquímedes el matemático y geómetra griego considerado el más notable científico y matemático de la antigüedad realizó una de las primeras contribuciones con la invención del “tornillo sin fin” que se le atribuye tradicionalmente. Los romanos desarrollaron otras máquinas y mecanismos hidráulicos; no sólo empleaban el tornillo de Arquímedes para trasegar agua en agricultura y minería, sino que construyeron extensos sistemas de conducción de agua: los acueductos. Durante el siglo I a.J.C., el escritor, arquitecto e ingeniero Vitrubio inventó la rueda hidráulica horizontal, que revolucionó la técnica de moler grano.

Después de Arquímedes pasaron más de 1600 años antes de que se produjera el siguiente avance científico significativo, este avance fue debido al gran genio italiano Leonardo Da Vinci, que aportó la primera ecuación de la conservación de masa o ecuación de continuidad y desarrolló múltiples sistemas y mecanismos hidráulicos y aerodinámicos.

En 1643 el matemático y físico italiano Evangelista Torricelli realizó el descubrimiento del principio del barómetro, por el que pasó a la posteridad, donde demostraba la existencia de la presión atmosférica. La unidad de presión Torr se nombró en su memoria. Formuló, además, el teorema de Torricelli, según el cual un fluido se vierte por un pequeño orificio con igual velocidad que si cayera desde la superficie del líquido hasta el orificio.

En 1755 se produjo un avance significativo debido al matemático suizo Leonard Euler, este discípulo de J. Bernoulli es considerado como uno de los fundadores de la hidrodinámica, pues fue quien primero dedujo las ecuaciones de movimiento de los fluidos, las llamadas ecuaciones de Euler. “Sin embargo, las descripciones matemáticas del comportamiento de los fluidos solo ganaron fuerza en el siglo XIX, mediante las ecuaciones de Navier - Stokes, a partir de los trabajos pioneros de los franceses Claude Navier (1822), Simeon Poisson (1829) y del inglés George Stokes (1845).”¹

Las soluciones analíticas para las ecuaciones de Navier - Stokes solo han sido determinadas para algunos pocos casos. La dificultad se debe a que las ecuaciones de Navier - Stokes son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, y la teoría matemática de esa clase de ecuaciones todavía no está suficientemente desarrollada para permitir la obtención de soluciones analíticas en regiones arbitrarias y condiciones de contorno generales. Debido a esa razón es que, en el estudio del movimiento de fluidos y de sus efectos, se utilizan ensayos experimentales. Estos ensayos se realizan en túneles de viento y tanques de agua.

Sin embargo debido a las limitaciones de costo, tiempo y equipamiento, es común la realización de medidas en apenas algunos puntos de la región en que ocurren los fenómenos de interés. Por ejemplo, la presión y las velocidades del flujo sobre el fuselaje de un avión son determinadas apenas en algunos puntos. Por lo tanto, no siempre los tratamientos teóricos y/o experimentales son satisfactorios.

¹ Oliveira Fortuna, Armando. Introdução a Dinâmica dos fluidos computacional. En su: Técnicas Computacionais para a Dinâmica dos Fluidos. São Paulo: Edusp, 2000. pp. 351-376

Fundamentalmente son dos las razones:

- a) El fenómeno en estudio no siempre es posible de reproducir en el laboratorio, incluso a escala reducida.
- b) El costo y el tiempo del montaje experimental pueden ser prohibitivos.

A partir de 1950, surgió una tercera alternativa, analizar el movimiento de los fluidos mediante simulaciones con ordenadores. Es así como se origina la dinámica de fluidos computacional o CFD, acrónimo de las palabras inglesas "Computational Fluid Dynamics".

1.2- Dinámica De Fluidos Computacional

La dinámica de fluidos computacional (DFC) se podría definir de la siguiente manera: "Área de computación científica que estudia métodos computacionales para simulación de fenómenos que envuelven fluidos en movimiento con o sin intercambios de calor"².

El uso de métodos numéricos en la mecánica de fluidos no implica que el análisis experimental y el análisis teórico estén puestos de lado. Es muy común que las tres técnicas se complementen durante un proyecto que envuelve flujo de fluidos y en el estudio de modelos teóricos para algún fenómeno en particular, como la turbulencia.

² Oliveira Fortuna, Introdução a Dinâmica dos fluidos computacional. En su: Técnicas Computacionais para a Dinâmica dos Fluidos. São Paulo:Edusp, 2000. pp. 351-376

En el primer caso, se puede utilizar los resultados del programa de simulación para orientar al proyectista en la elección de los experimentos a ser realizados. Ya en el segundo caso, las ecuaciones de nuevos modelos teóricos para problemas de mecánica de fluidos son resueltas numéricamente, y los resultados comparados con experimentos, confirmando o no la validez de estos nuevos modelos. Finalmente, durante la etapa de pruebas del simulador de flujos, se verifica si el mismo, está correcto, se comparan sus resultados con experimentos, o con valores asintóticos, previstos por la teoría de la mecánica de los fluidos.

El objetivo básico de la DFC es reducir el número de experimentos y explorar fenómenos que no podrían ser estudiados en laboratorio de forma práctica. Utilizando las técnicas de la DFC, se puede evaluar numéricamente los diversos parámetros relevantes al problema. Estos pueden ser fácilmente alterados hasta que el resultado de la simulación atienda las exigencias del proyecto. Todo esto de forma más conveniente a costos y tiempos menores que utilizando técnicas experimentales y/o análisis teóricos.

A pesar de toda la flexibilidad que la técnica computacional ofrece, todavía no puede resolver muchos de los problemas reales que envuelven flujo de fluidos. Existen situaciones extremadamente difíciles de ser modeladas y transformadas en ecuaciones para tratamiento numérico. El ejemplo más directo es la modelación de flujos turbulentos, esto se debe a que todavía no se formula un modelo de turbulencia válido para todas las situaciones.

De esta forma, flujos turbulentos todavía son de difícil tratamiento numérico, tanto por la elección del modelo más adecuado como por la solución de las ecuaciones que expresan ese modelo, ya que ellas son, normalmente bastante complejas.

En general, la DFC presenta un versátil conjunto de algoritmos para la solución numérica de los problemas de flujo. La aplicación de cada algoritmo depende de la situación tratada, siendo importante que el usuario conozca tanto los aspectos físicos del problema como los aspectos numéricos de la metodología de solución adoptada.

1.3- Aspectos Históricos De La DFC

El desarrollo de la DFC está íntimamente ligado a la rápida evolución de las computadoras digitales. Antes de la aparición de la computadora los trabajos numéricos eran realizados a mano, con el involucramiento de varias "calculadoras humanas" o mediante calculadoras primitivas. A continuación se citan algunos de los trabajos numéricos más relevantes así como los diversos autores que contribuyeron al desarrollo de la DFC.

Lewis Fry Richardson (1910), es considerado por muchos como el precursor de la DFC. Entre otras novedades, él presentó la solución numérica de la ecuación de Laplace por un método iterativo tipo Jacobi y discutió el correcto tratamiento de las condiciones de frontera.

Liebmann (1918), resolvió la ecuación de Laplace utilizando el método iterativo de Gauss – Seidel.

Thom (1933), propuso la primera solución numérica para un flujo viscoso. Él calculó manualmente las líneas de corriente de un flujo estacionario alrededor de un cilindro, utilizando diferencias finitas. Uno de los aspectos más importantes de ese trabajo es que él presenta el concepto de refinamiento localizado.

La solución de ecuaciones dependientes del tiempo recibió un grande impulso con los métodos de Crank & Nicolson (1947) y ADI de Peaceman & Rachford (1955); ambos métodos son utilizados hasta el día de hoy.

La década de 1960 se destacó por el surgimiento de diversos métodos numéricos prácticos para la solución de flujos viscosos incompresibles. El método de Fromm (1964) fue uno de los primeros.

El método MAC (marker and cell), descrito por Harlow & Welch (1965), fue desarrollado para simular tanto flujos internos como externos con superficies libres. El método MAC difundió el uso de la malla dislocada, que resuelve de forma más elegante algunas dificultades en la discretización de las ecuaciones de flujos incompresibles. Por ser versátil y de implementación simple, el MAC se popularizó entre investigadores, siendo utilizado hasta hoy en alguna de sus muchas versiones mejoradas.

Chorin (1967), presentó el método de compresibilidad artificial, el cual modifica las ecuaciones de flujo incompresible de tal manera que presenten la misma forma que las ecuaciones de flujos compresibles, permitiendo el uso de las técnicas de solución adoptadas para esta clase de flujo. Posteriormente Chorin (1968) introdujo el método de la proyección, otra filosofía para la resolución de las ecuaciones de flujo.

Amsden & Harlow (1968), presentaron un artículo el cual fue uno de los primeros estudios numéricos de turbulencia en fluidos. Los autores incorporaron un modelo de turbulencia directamente a las ecuaciones del modelo de MAC.

Viecelli (1969), propuso una extensión al método MAC para que fuese capaz de tratar dominios con fronteras curvas.

Amsden & Harlow (1970), propusieron el método SMAC (simplified MAC) para resolver algunos problemas con el MAC y reducir su costo computacional. Hasta hoy es posible encontrar implementaciones elaboradas del SMAC.

Hirt & cook (1972), propusieron el método SOLA, basado en el MAC; este método se emplea para el estudio de los efectos de corrientes de aire alrededor de estructuras. La versión para superficies libres fue presentada por Nichols & Hirt (1973).

Patankar (1980), presentó una obra científica la cual fue un marco para la solución numérica de flujos incompresibles. Continúa siendo referencia en varios artículos y libros, pues popularizó la técnica que hoy es una de las más utilizadas en la literatura de la DFC en la solución de flujos incompresibles: el método SIMPLE. La notación presentada en el libro de Patankar se tornó común en las publicaciones de DFC, así como el método de volúmenes finitos, el cual es adoptado en la obra.

La generación automática de mallas estructuradas no uniformes recibió: un gran impulso con el trabajo de Thompson (1984)

Vanka (1986) presentó el método SCGS, que todavía es uno de los mejores para la resolución acoplada de las ecuaciones del flujo incompresible.

Los métodos descritos anteriormente no son los únicos que resuelven flujos incompresibles, pero gran parte de las técnicas encontradas en la literatura moderna derivan de alguno de ellos.

1.4- Aplicación De La DFC

La industria aeroespacial fue la pionera en utilizar técnicas numéricas y hoy en día esta industria es una de las que más hacen uso de la DFC, sin embargo cada día resultan más comunes las aplicaciones en procesos industriales. A continuación se muestra las aplicaciones más importantes donde se emplea las técnicas numéricas.

a) ***Industria aeroespacial.*** Las aplicaciones habitualmente estudiadas son los efectos de la microgravedad, el diseño de motores de propulsión, la ventilación de habitáculos, el diseño de vehículos aeroespaciales, los flujos de combustible en conductos y tanques.

b) ***Industria aeronáutica y naval.*** Estudios en perfiles aerodinámicos, diseño de trenes de aterrizaje, estudios en hélices marinas y el diseño de carenas de barcos.

c) ***Industria Automovilística.*** Las aplicaciones típicas son el estudio de la aerodinámica de vehículos, la climatización del habitáculo interior, el enfriamiento del bloque del motor y el flujo en válvulas de distribución.

d) ***Industria de procesos e industrias químicas.*** Problemas habituales resueltos con técnicas CFD son el flujo de plásticos, la conducción de lodos, el flujo del vidrio fundido, la deposición de vapores químicos, el llenado de moldes y los flujos reactivos complejos.

e) ***Industria de conformados metálicos.*** Las aplicaciones más comunes en esta industria son los procesos de fundición continua, las fundiciones abiertas, la extrusión de metales y los procesos de solidificación.

f) **Industria Nuclear.** Algunos estudios relacionados con el estudio en conductos de sustancias originadas en los procesos de reacción nuclear, el enfriamiento del reactor, estudios relacionados con el intercambio de calor, el flujo en el interior del reactor, el almacenamiento de residuos nucleares, el diseño de torres de enfriamiento y las investigaciones sobre chorros térmicos.

g) **Industria Electrónica.** Los problemas más utilizados son el flujo y la distribución de temperaturas en carcasas electrónicas, el enfriamiento de componentes y el flujo de aire en las unidades de disco.

h) **Industria biomédica y farmacéutica.** Entre otras aplicaciones, destacan el flujo de la sangre en venas y arterias, el flujo a través de distintas prótesis, los fenómenos de centrifugación y el diseño de sistemas de inyección intravenosa.

i) **Industria alimentaria.** Destacan los diseños de procesos de pasteurización, la extrucción de fluidos y los hornos de convección.

j) **Otras aplicaciones.** Destacan los estudios en oceanografía, predicciones en hidrología (planificación de embalses, regímenes de precipitaciones, etc.), los flujos en conductos (calefacción, flujos internos en edificaciones, ingeniería de complejos urbanos), la meteorología, los estudios de flujos alrededor de edificios, puentes y otras estructuras exteriores, las investigaciones relacionadas con la propagación de contaminantes, las investigaciones en flujos con varias fases (sprays) y las aplicaciones en turbomáquinas.

Por lo tanto, el panorama es realmente amplio y apto de crecimiento en el futuro.

1.5- Programas Para DFC

Existen, en el mercado mundial, programas comerciales que simulan los más diversos tipos de flujo. Entre ellos se puede citar: Fluent, PolyFlow, Fidap, Flowizard, Phoenix, Flow3D, Star - CD y CFX . Para utilizar estos programas con eficiencia, no basta que el usuario conozca de computación: es importante que tenga familiaridad de las propiedades físicas del problema así como de las propiedades numéricas.

Existen diversos paquetes comerciales además de los citados anteriormente pero los más completos serían Phoenix y Fluent. Una descripción breve acerca de estos dos programas sería la siguiente:

Fluent, es uno de los más completos y robustos softwares de CFD disponibles en el mercado, este paquete de simulación en dinámica de fluidos computacional es el de mayor uso en el mundo.

Fluent cuenta con una interfase muy amigable al usuario, posee una interfase visual, paneles ordenados con una secuencia según se van utilizando, además de ayuda online en cada panel, que facilitan el uso del programa.

Este software incorpora una gran cantidad de modelos para diferentes procesos físicos y químicos que le dan una enorme versatilidad. De esta manera, no solo podrá usted realizar simulaciones de flujos laminares o turbulentos, newtonianos o no newtonianos, compresibles o incompresibles, monofásicos o multifásicos, sino también procesos de transferencia de calor por radiación, conducción y convección, así como procesos de fundición, combustión de gases, líquidos y combustibles sólidos. Además Fluent posee avanzados recursos para la utilización de procesamiento paralelo, permitiendo la solución de problemas complejos en menores intervalos de tiempo.

La última versión del programa, es la versión 6.2, la cual ofrece nuevas características y funcionalidades al ya robusto programa. Para ampliar su información sobre el software Fluent, consulte la pagina web: www.fluent.com. En dicha pagina web encontrara una descripción completa del software

Phoenix, es otro de los más completos softwares de CFD ya que permite la simulación de diversos flujos de fluidos y de procesos de transferencia de calor a partir de ficheros de datos contruidos por el usuario, o existentes en una biblioteca de ayuda que incluye el propio código.

El programa posee una interfaz gráfica para el diseño de la malla computacional así como también para visualizar correctamente los resultados de la modelación. Otra característica importante de este software es la base de datos que cuenta, posee alrededor de 1000 ejemplos de simulación y casos prácticos.

Para ampliar su información sobre el software Phoenix consulten la pagina web: www.cham.co.uk/ en dicha pagina web encontrará una descripción detallada del software.

CAPITULO II

II-MÉTODOS DE RESOLUCIÓN Y NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DE GOBIERNO

2.1- Ecuaciones De Gobierno

Las leyes que rigen el movimiento de una partícula fluida son conocidas desde mediados del siglo XIX. Son las denominadas ecuaciones de Navier – Stokes.

Estas ecuaciones pueden expresarse con distintas nomenclaturas, en distintos sistemas de referencia y con distintas notaciones. Para un fluido Newtoniano y en coordenadas cartesianas se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\rho) \left(\frac{DV_x}{Dt} \right) = (\rho)(g_x) - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} (\rho) \left(\frac{DV_y}{Dt} \right) = (\rho)(g_y) - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
(\rho) \left(\frac{DV_z}{Dt} \right) = (\rho)(g_z) - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Cabe mencionar que en las ecuaciones (2.1 - 2.3) la densidad y la viscosidad son constantes.

Matemáticamente las ecuaciones de Navier – Stokes constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales, con las variables V_i , P como variables dependientes.

Los términos de más alto orden que aparecen en estas ecuaciones son lineales y de segundo orden y aparecen debido a los efectos viscosos, en cuanto a los términos convectivos son no lineales y de primer orden.

Por estas razones estas ecuaciones son también llamadas cuasi lineales. Cualquier conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, puede ser clasificado como elíptico, parabólico o hiperbólico, teniendo la ecuación de Navier – Stokes estos tres tipos de comportamiento.

Debido a la complejidad de la ecuación de Navier – Stokes hasta el día de hoy no se conoce su solución analítica, por tal motivo es necesario buscar métodos alternativos que proporcionen una buena predicción, es decir, métodos que proporcionen una solución numérica aproximada. Así, la solución numérica aproximada se obtendrá a partir de la resolución de una serie de relaciones algebraicas obtenidas mediante técnicas de discretización de las ecuaciones diferenciales parciales.

2.2- Condiciones De Contorno Y Condiciones Iniciales

La correcta definición de las condiciones iniciales y de contorno constituye una parte fundamental en la definición de un problema numérico, definir correctamente estos parámetros es de suma importancia así como las ecuaciones de gobierno.

Las condiciones iniciales determinan el estado del fluido en el instante inicial considerado como origen para la evolución temporal. Por tanto, para definir correctamente un problema se debe conocer el valor que tienen todas las variables en ese instante de tiempo. Muchas veces estos valores no se conocen, por lo tanto se tiene que buscar una alternativa, la más sencilla y habitual consiste en dar a todas las variables un valor cero, asumiendo que, si se avanza suficientemente en el tiempo, se llega a un estado estacionario, independientemente de la solución inicial, según las condiciones de contorno sean constantes o periódicas, esto tiene como ventaja la sencillez de implementación, pero tiene una gran desventaja, pues si dicha solución inicial se aparta bastante de la solución real, puede dar lugar a problemas de convergencia en cuanto a la resolución de las ecuaciones.

Las condiciones de contorno pueden ser de varios tipos. Los más comunes son:

- a) **Dirichlet**. La variable dependiente es conocida en la frontera física del problema.
- b) **Neumann**. Se conoce en la frontera física del problema el valor del gradiente normal de la variable dependiente.
- c) **Robin**. La condición conocida constituye una combinación lineal de los tipos anteriores.

d) *Mixtas*. En unas zonas de la frontera física se tienen condiciones de contorno Dirichlet y en otras zonas condiciones del tipo Neumann.

2.3- Discretización De Las Ecuaciones.

A lo largo de la historia de los métodos numéricos aplicados a la Mecánica de Fluidos muchas han sido las aproximaciones o formas de pasar del modelo físico-matemático al modelo numérico discreto. Algunos de estos métodos de discretización se describen en el siguiente capítulo.

Cabe mencionar que las técnicas modernas se construyen con un requerimiento adicional importante, consistente en la condición de que el resultado final de la discretización sea fácilmente integrable.

2.4- Métodos De Discretización

El objetivo de la discretización es sustituir el problema continuo con infinitos grados de libertad en espacio y tiempo por un problema discreto con finitos grados de libertad. Los métodos de discretización más conocidos son:

- a) Diferencias finitas
- b) Elementos finitos
- c) Volúmenes finitos

A continuación se describen brevemente estos tres métodos.

2.4.1-Método de las diferencias finitas

El método de diferencias finitas (MDF) está basado en la representación de una derivada mediante una aproximación por diferencias entre los puntos vecinos. La aproximación de la derivada puede ser realizado de diversas formas, pero la aproximación mas utilizada es a partir de la expansión de la serie de Taylor.

Utilizando los desarrollos en series de Taylor se describen las derivadas como diferencias entre los valores de una variable en varios puntos del espacio o del tiempo. Mediante la aplicación de tales aproximaciones, el sistema original de ecuaciones diferenciales se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas, que es resuelto mediante técnicas convencionales.

La discretización mediante el método de diferencias finitas está especialmente ideada para una malla cartesiana. Su aplicación a geometrías curvilíneas más complejas requiere la transformación de las ecuaciones de gobierno por medio del correspondiente cambio de base a un sistema de coordenadas que siga la dirección de dichas geometrías curvilíneas. Una vez realizado el cambio de variable, el método de diferencias finitas es aplicable a la resolución de problemas en dichas geometrías.

2.4.2- Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (MEF) es un método de aproximación de problemas continuos, de tal forma que:

- El continuo se divide en un número finito de partes, “*elementos*”, cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros asociados a ciertos puntos característicos denominados “*nodos*”. Estos nodos son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes.

- La solución del sistema completo sigue las reglas de los problemas discretos. El sistema completo se forma por ensamblaje de los elementos.
- Las incógnitas del problema dejan de ser funciones matemáticas y pasan a ser el valor de estas funciones en los nodos.
- El comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento de los nodos mediante las adecuadas *funciones de interpolación o funciones de forma*.

El MEF, por lo tanto, se basa en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado, esta transformación se denomina discretización del modelo. El conocimiento de lo que sucede en el interior de este modelo del cuerpo aproximado, se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nodos. Es por lo tanto una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos.

2.4.3- Método de los volúmenes finitos

El método de los volúmenes finitos (MVF) no es más que otro procedimiento para obtener una versión discreta de la EDP. Las discretizaciones conservativas son la base del método de los volúmenes finitos. Este método constituye la técnica más comúnmente empleada en la discretización de las ecuaciones de constitución. El MVF se desarrollo para resolver específicamente problemas de transferencia de calor y de mecánica de fluidos, esta afirmación parte del hecho de que las leyes básicas de la mecánica de fluidos son leyes de conservación y pueden ser expresadas en forma de balances microscópicos de las distintas variables.

En primer lugar consideremos una malla de discretización del espacio fluido. En torno a cada punto de esta malla se construye un volumen de control que no se traslapa con los puntos vecinos. De esta forma el volumen total de fluido resulta ser igual a la suma de los volúmenes de control considerados.

La ecuación diferencial a resolver se integra sobre cada volumen de control, lo cual entrega como resultado una versión discretizada de dicha ecuación. Para realizar la integración se requiere especificar perfiles de variación de la variable dependiente entre los puntos de la malla, de modo que se pueda evaluar las integrales resultantes. La principal propiedad del sistema de ecuaciones discretizadas resultante, es que la solución obtenida satisface en forma exacta las ecuaciones de conservación consideradas, independientemente del tamaño de la malla.

Unas de las ventajas más importantes del método de los volúmenes finitos es que admite dominios arbitrarios y la discretización es conservativa. Otras características de este método serán explorados en los siguientes capítulos.

CAPITULO III

III- MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

3.1- Introducción

El método de los volúmenes finitos es la técnica más comúnmente empleada en la discretización de las ecuaciones de constitución. Este método se desarrolló para resolver específicamente problemas de transferencia de calor y de mecánica de fluidos. “Este método evolucionó en base al método de diferencias finitas, otro método de resolución de ecuaciones diferenciales; el MVF no presenta problemas de estabilidad o convergencia, por garantizar que, en cada volumen discretizado la propiedad en cuestión (por ejemplo, la masa) obedece a la ley de la conservación”¹.

La aproximación de volúmenes finitos es particularmente útil cuando la malla no es uniforme, particularmente en dos y tres dimensiones. Las ecuaciones diferenciales parciales son integradas directamente sobre la malla, lo que facilita la obtención de las ecuaciones de diferencias finitas y su posterior solución numérica.

La ecuación gobernante de flujo y transferencia de calor es la ecuación de transporte, que puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{Termino Transitorio}} + \underbrace{\nabla(\rho\vec{u}\phi)}_{\text{Termino Convectivo}} = \underbrace{\nabla(\Gamma_\phi \cdot \nabla\phi)}_{\text{Termino Difusivo}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{Termino Fuente}} \quad (3.1)$$

¹ http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_dos_volumes_finitos

En la ecuación (3.1) Γ es el coeficiente de difusión y S el término fuente. Las cantidades Γ y S son específicos a un determinado fenómeno y dependen del significado de ϕ .

Esta ecuación es denominada forma conservativa o forma divergente y se caracteriza por la presencia de los términos relativos a los flujos convectivos de la variable ϕ ($\rho.u.\phi, \rho.v.\phi, \rho.w.\phi$).

La forma conservativa es obtenida directamente a través de la aplicación del principio de conservación en la variable dependiente de interés, en un volumen infinitesimal, siendo la misma utilizada en la derivación del método de los volúmenes finitos.

Así como otras técnicas numéricas empleadas en la resolución de EDPs, el método de volúmenes finitos transfiere informaciones de las fronteras, condiciones de contorno, que son especificadas para el interior del dominio de solución. Obteniendo así la distribución espacial y temporal $\phi = \phi(x, y, z, t)$ de la variable dependiente en puntos discretos. En una visión simplificada el mismo consiste de 4 etapas:

1. División del dominio de solución en volúmenes de control finitos.
2. Integración de la ecuación diferencial parcial en los volúmenes de control finitos, en los cuales fue dividido el dominio de solución;
3. Discretización de cada término de la EDP a modo de convertirla en un conjunto de ecuaciones algebraicas;
4. Solución del sistema de ecuaciones algebraicas resultante, empleando métodos iterativos.

δY_{SP} : Distancia entre el punto nodal S y el punto nodal P.

δY_{PN} : Distancia entre el punto nodal P y el punto nodal N.

δY_{sp} : Distancia entre la interfase “s”y el punto nodal P.

δY_{pn} : Distancia entre el punto nodal P y la interfase “n”.

Cuando $\delta X_{wp} = \delta X_{pe}$ y $\delta Y_{sp} = \delta Y_{pn}$ se dice que dicha malla es uniforme. Las mejores mallas deben ser más refinadas en las regiones donde hay gran variación de la variable dependiente ϕ y de las propiedades físicas (ρ, μ, C_p, etc), y “groseras” en las regiones que presentan variaciones relativamente pequeñas.

Desde que la distribución $\phi = \phi(x, y, z)$ no es conocida en el dominio de cálculo, se espera que el ingeniero tenga conocimiento acerca del sistema a ser modelado de modo que pueda prever cualitativamente un comportamiento de la variable dependiente, el cual puede ser empleado en el refinamiento de la malla.

Se sugiere que primero se obtengan soluciones empleando mallas “groseras” (poco refinadas) para obtener conocimiento sobre las variaciones de ϕ ; a partir de los cuales, la malla no – uniforme pueda ser construida. Ésta es una de las razones por la cual los especialistas insisten que el método numérico deba suministrar soluciones dotadas de realismo físico, incluso en los casos que se emplean mallas groseras.

El número de puntos de la malla numérica necesarios para suministrar una solución adecuada y la manera en que los mismos se distribuyen en el dominio de cálculo son cuestiones que dependen de la naturaleza del problema a ser resuelto.

Estudios empleando una malla con pocos puntos nodales es una forma adecuada de comprender la naturaleza de la solución. Tal procedimiento es comúnmente empleado en los experimentos en laboratorio, pues experimentos preliminares son usados para decidir el número y la localización de los puntos de medición a ser instalados en el experimento final.

3.2- Solución Numérica De La Conducción De Calor Mediante El Método De Volúmenes Finitos

En el capítulo anterior se mostró una descripción del método de volúmenes finitos, el objetivo para este capítulo es presentar la metodología de volúmenes finitos para problemas de conducción de calor en estado estacionario y en estado transitorio.

Existen dos maneras para obtener las ecuaciones aproximadas en el método de volúmenes finitos. La primera es la realización de balance de la propiedad en cuestión en los volúmenes elementales, o volúmenes finitos, y la segunda es, partiendo de la ecuación diferencial en la forma conservativa, integrarla sobre el volumen elemental, en el espacio y en el tiempo.

Lógicamente, los procesos son equivalentes, pues basta recordar que para deducir las ecuaciones diferenciales es necesario primero realizar un balance en un volumen infinitesimal.

Los siguientes capítulos (3.2.1 - 3.2.4) serán complementados con la aplicación del software creado ***RUPAY-10X***.

3.2.1- Conducción unidimensional en estado estable

La ecuación de transporte (Ec. 3.1) es utilizada como punto de partida para el procedimiento computacional en volúmenes finitos. En la ecuación de conservación el término transitorio y el término convectivo son eliminadas debido a que estamos analizando la conducción en estado estable. Con las restricciones indicadas se obtiene:

$$\nabla(\Gamma \nabla \phi) + S = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S = 0 \quad (3.3)$$

Como estamos analizando la conducción en estado estacionario de una propiedad ϕ , en un dominio unidimensional definido por la figura 3.2. El proceso es gobernado por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S = 0 \quad (3.4)$$

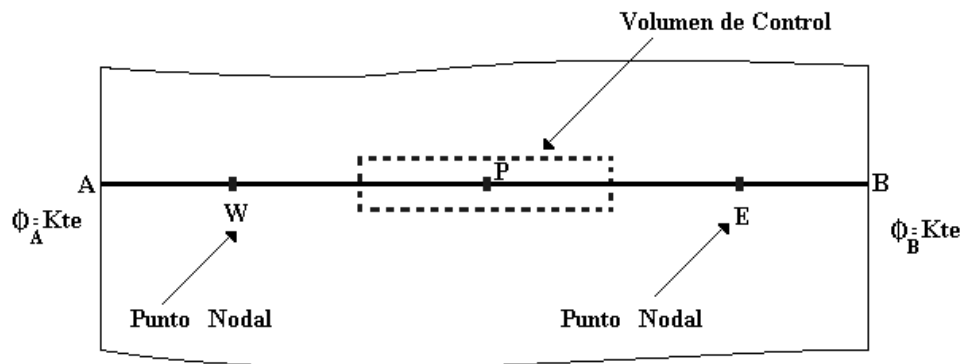


Fig. 3.2- Dominio unidimensional.

Donde Γ es el coeficiente de difusión y S el término fuente. Los valores de contorno en los puntos A y B son prescritos.

Las etapas para resolver este tipo de problemas se realizará en tres etapas:

1. Generación de la malla
2. Discretización
3. Solución de las ecuaciones

I-Generación de la malla

El primer paso en el MVF es dividir el dominio en volúmenes discretos. Esto es, introduciendo un número de puntos entre los límites del dominio A y B.

Las caras de los volúmenes de control son posicionados en la mitad de dos puntos adyacentes, es decir cada punto nodal es limitado por las caras de un volumen de control.

El punto nodal general es identificado por P y sus puntos vecinos en la formulación unidimensional, los puntos al Este y Oeste de P, serán identificados por E y W respectivamente.

La cara localizada al oeste del punto P es definido por la letra minúscula “w”, de la misma forma la cara en el este del punto P es definido por “e”. Las distancias entre los puntos W y P y entre los puntos P y E, son identificados por δx_{WP} y δx_{PE} respectivamente.

La figura que se muestra a continuación (Fig. 3.3) representa un volumen de control unidimensional con una longitud Δx . La notación que se muestra en esta figura es la misma que se usará en los siguientes capítulos.

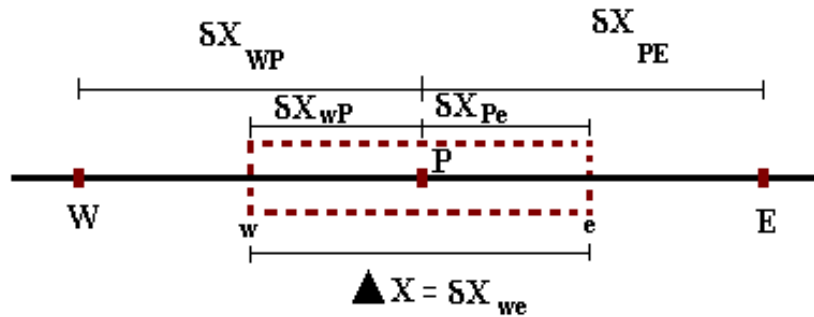


Fig. 3.3- Volumen de control unidimensional.

II- Discretización

El paso fundamental en el método de los volúmenes finitos es la integración de las ecuaciones gobernantes sobre un volumen de control V con el

objetivo de linealizar las ecuaciones diferenciales, obteniendo una relación discretizada para el punto P.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S = 0$$

Integrando en el volumen de control V , en torno al punto P:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dv + \int_V S dv = 0 \quad (3.5)$$

Las fronteras laterales del volumen V son denominadas e y w , ellas son también, los límites de integración de las integrales en la ecuación 3.5. Por lo tanto,

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \quad (3.6)$$

Por el teorema fundamental del cálculo, podemos determinar la primera integral de la ecuación 3.6.

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w$$

El término fuente S es integrado utilizando el teorema del valor medio; por lo tanto el segundo término de la ecuación 3.6 resulta:

$$\int_w^e S dx = \bar{S} v = \bar{S} \Delta x$$

\bar{S} es el valor medio de S en v . Combinando las aproximaciones para las dos integrales tenemos:

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dv + \int_v S dv = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \bar{S} \Delta x \quad (3.7)$$

el término de las componentes $\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$ del flujo difusivo, en la ecuación discretizada (Ec. 3.7) posee una interpretación física directa.

La componente del flujo difusivo de la propiedad ϕ que atraviesa la frontera w del volumen de control menos la componente del flujo que entra por la cara e es igual a la variación de ϕ dentro del volumen de control. Esa variación, que

puede ser el aumento o la disminución de ϕ dentro de ν es contra balanceada por el termino fuente S .

Si ϕ fuera la temperatura, entonces Γ representa el coeficiente de conductividad térmica del material.

El paso siguiente es determinar, en función de las incógnitas en los puntos discretos, los valores de $\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e$ y $\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w$. Inicialmente, se observa que esos términos pueden ser escritos como:

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = \Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e \quad \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w = \Gamma_w \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w \quad (3.8)$$

El valor de Γ en las caras e y w puede ser obtenido por interpolación lineal entre valores adyacentes de Γ en los puntos de la malla. Por ejemplo, cuando Γ_e y Γ_w están en el punto medio entre los respectivos puntos discretos, se puede aproximarlos por:

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \quad \Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2}$$

Las derivadas de Φ en la ecuación pueden ser aproximadas por diferencias centrales de segundo orden:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e \approx \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} .$$

Finalmente, la ecuación de diferencias finitas para el punto P puede ser escrita como

$$\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} + S_c + S_P \phi_P = 0$$

Reagrupando los términos

$$\left(\frac{\Gamma_w + \Gamma_e}{\Delta x} - S_P \right) \phi_P = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} \phi_W + \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \phi_E + S_c \quad (3.9)$$

Finalmente obtenemos:

$$a_P(\phi_P) = a_W(\phi_W) + a_E(\phi_E) + S_c \quad (3.10)$$

Paso III.-Solución de las Ecuaciones Discretizadas

En los capítulos previos discutimos los métodos de discretización de las ecuaciones gobernantes en flujo de fluidos y transferencia de calor. Este procedimiento resulta en un sistema lineal de ecuaciones algebraicas que tiene que

ser resuelto. La complejidad y el tamaño de este conjunto depende de la característica del problema (1D, 2D o 3D), número de VC, y el método de discretización utilizado.

Para resolver este sistema de ecuaciones, existen dos familias de métodos: Los métodos directos y los métodos indirectos o iterativos.

Uno de los métodos más conocidos de la familia de los métodos directos es el método de eliminación gaussiana. Los métodos iterativos son basados en la aplicación repetitiva del algoritmo hasta alcanzar la convergencia.

Los métodos mas conocidos son el Jacobi y Gauss – Seidel punto a punto, estos métodos son relativamente simples de implementar computacionalmente, sin embargo, pueden alcanzar la convergencia lentamente cuando el sistema de ecuaciones es muy grande.

Thomas (1949), desarrollo el TDMA (Tri Diagonal Matrix). El método TDMA es un método directo para el caso unidimensional, sin embargo, puede ser aplicado a un problema multidimensional. Este método es muy utilizado en CFD. Una visión más detallada de este método, así como su implementación se encuentra en el anexo A.

3.2.2- Conducción bidimensional en estado estable

Como estamos analizando la conducción en estado estacionario de una propiedad ϕ , en un dominio bidimensional el proceso es gobernado por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Gamma \cdot \partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Gamma \cdot \partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (3.11)$$

Las etapas para resolver este tipo de problemas se realizará del mismo modo en el que se realizó para el caso de la conducción de calor unidimensional en estado estacionario es decir en tres etapas:

I.- Generación de la Malla

El primer paso en el método numérico de volúmenes finitos es dividir el dominio en volúmenes discretos, esto es introduciendo un número de puntos entre los límites del dominio.

Las figuras 3.4 y 3.5 muestran una malla computacional 2D.

La diferencia entre estas figuras es la notación empleada; para la figura 3.4 se empleó la notación utilizada en el método de volúmenes finitos, mientras que para la figura 3.5 se empleó la notación usada en el método de diferencias finitas.

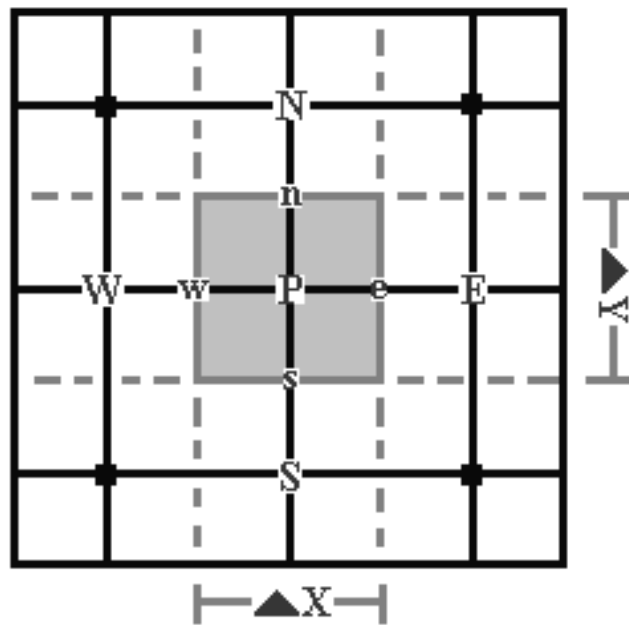


Fig. 3.4- Malla computacional 2D (MVF)

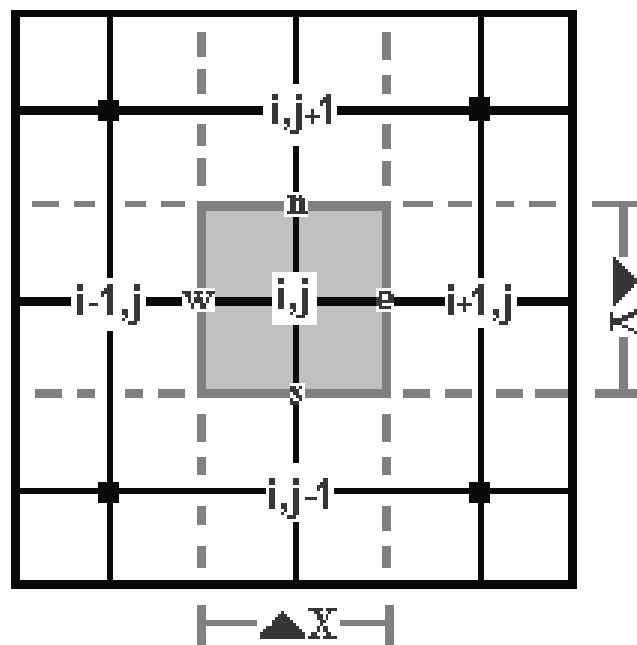


Fig. 3.5- Malla computacional 2D (MDF)

La figura 3.6 muestra la malla bidimensional y algunos de los puntos discretos. Inicialmente, se observa que los puntos de la malla se localizan en la intersección de las líneas horizontales con las verticales, estando separados entre si por una distancia Δx y Δy respectivamente, no respectivamente iguales.

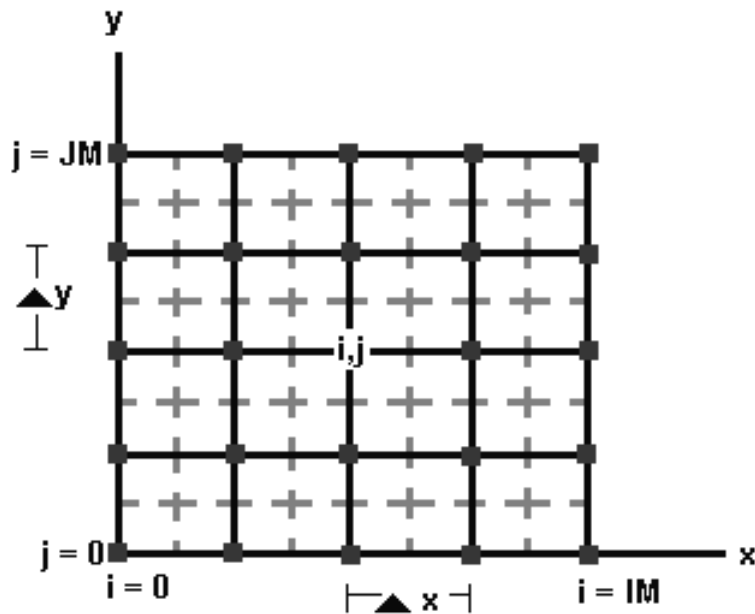


Fig. 3.6: Malla bidimensional.

Los índices i y j identifican un punto en la i -ésima columna y en la j -ésima línea, respectivamente. Así un punto (i,j) posee coordenadas $(X_0 + i\Delta x, Y_0 + j\Delta y)$, en que el punto (X_0, Y_0) representa el origen del sistema de coordenadas, tomando aquí como igual a $(0,0)$.

II.-Discretización

En la ecuación 3.11

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S = 0$$

Integrando sobre el volumen de control.

$$\int \int \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy . dx . dz + \int \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dy . dx . dz + \int \int \int S dx . dy . dz = 0 \quad (3.12)$$

Para el primer término de la ecuación:

$$\int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx . dy . dz \right] = \int \int \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right] dy . dz$$

$$\int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx . dy . dz \right] = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y . \Delta z$$

$$\int \int \int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx.dy.dz \right] = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right] A$$

$$\int \int \int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx.dy.dz \right] = A_e \Gamma_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - A_w \Gamma_w \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w$$

Para el segundo término de la ecuación:

$$\int \int \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy.dx.dz \right] = \int \int_w^e \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s \right] dx.dz$$

$$\int \int \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy.dx.dz \right] = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x.\Delta z$$

$$\int \int \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy.dx.dz \right] = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s \right] A$$

$$\int \int \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy.dx.dz \right] = A_n \Gamma_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n - A_s \Gamma_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s$$

Para el tercer término:

$$\int \int \int_{w \ s}^e \ (S) dx.dy.dz = S.\Delta x.\Delta y.\Delta z = S.\Delta V$$

En la ecuación 3.12 finalmente tenemos:

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s \right] + S.\Delta V = 0 \quad (3.13)$$

para la obtención de los valores: $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n$ y $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s$ se

realiza la aproximación de la derivada mediante la serie de Taylor.

Mediante la aproximación por diferencias centradas obtenemos los siguientes valores:

Flujo Transversal a la cara Oeste

$$\Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\Phi_P - \Phi_w}{\Delta x_{wp}} \right)$$

Flujo Transversal a la cara Este

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right)$$

Flujo Transversal a la cara Sur

$$\Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_s A_s \left(\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_{SP}} \right)$$

Flujo Transversal a la cara Norte

$$\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n = \Gamma_n A_n \left(\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_{PN}} \right)$$

Sustituyendo estas Expresiones en la ecuación 3.13 obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \Gamma_e A_e \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + \\ \Gamma_n A_n \left(\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_{PN}} \right) - \Gamma_s A_s \left(\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) + S \Delta V = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Multiplicando términos:

$$\begin{aligned} & \Gamma_e A_e \left(\frac{\Phi_E}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_e A_e \left(\frac{\Phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\Phi_P}{\Delta x_{WP}} \right) + \Gamma_w A_w \left(\frac{\Phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + \\ & \Gamma_n A_n \left(\frac{\Phi_N}{\delta y_{PN}} \right) - \Gamma_n A_n \left(\frac{\Phi_P}{\Delta y_{PN}} \right) - \Gamma_s A_s \left(\frac{\Phi_P}{\Delta y_{SP}} \right) + \Gamma_s A_s \left(\frac{\Phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) + S \cdot \Delta V = 0 \end{aligned}$$

Finalmente si $S = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_P \left[\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \right) + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right) + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}} \right) + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}} \right) \right] = \\ \Phi_W \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \right) + \Phi_E \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right) + \Phi_S \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}} \right) + \Phi_N \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Los términos $\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x_{WP}} \right), \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x_{PE}} \right), \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\Delta y_{SP}} \right)$ y $\left(\frac{\Gamma_n A_n}{\Delta y_{PN}} \right)$, se representan de la

siguiente manera a_w, a_e, a_n, a_s

Remplazando en la última ecuación obtenemos:

$$\Phi_P [a_w + a_e + a_s + a_n] = \Phi_W \cdot a_w + \Phi_E \cdot a_e + \Phi_S \cdot a_s + \Phi_N \cdot a_n \quad (3.16)$$

la ecuación 3.16 también puede ser representada de la siguiente manera:

$$\Phi_{i,j} [a_w + a_e + a_s + a_n] = \Phi_{i-1,j} \cdot a_w + \Phi_{i+1,j} \cdot a_e + \Phi_{i,j-1} \cdot a_s + \Phi_{i,j+1} \cdot a_n \quad (3.17)$$

III.-Solución de las Ecuaciones Discretizadas

Este capítulo aplica las técnicas de discretización discutidas anteriormente. Vimos que para resolver un sistema de ecuaciones lineales existen dos familias de métodos: los métodos directos y los métodos indirectos o iterativos.

En relación a los métodos directos, los iterativos tienen la ventaja de ser aplicables cuando el sistema de ecuaciones es no lineal y de no ser tan afectados por errores de redondeo en comparación con los métodos directos. Además de esto, son de implementación directa.

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen con tanta frecuencia que existen conjuntos de programas especialmente elaborados para resolverlos; esos programas son encontrados en bibliotecas, una de las más completas es Netlib ([http:// www.netlib.org](http://www.netlib.org)), en esta biblioteca se encuentra sub-rutinas para la solución de sistemas lineales, tanto por métodos iterativos como directos.

3.2.3- Conducción unidimensional en estado transitorio

La metodología utilizada para el caso de problemas unidimensionales y bidimensionales se puede extender a los casos unidimensionales y bidimensionales en estado transitorio.

Para problemas transitorios, las discretizaciones también pueden ser realizadas mediante la técnica de volúmenes finitos. Considere la ecuación transitoria de conducción de calor

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S \quad (3.18)$$

En la que ρ es la densidad y $\phi = \phi(x, t)$. Integrando la ecuación 3.18 en el volumen de control y también en el tiempo, entre los instantes t_n y $t_n + \Delta t$, obtenemos:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dx dt = \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \int_w^e S dx dt \quad (3.19)$$

el lado derecho de la ecuación 3.19 puede ser escrito como:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \left[\int_w^e \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S \right) dx \right] dt$$

integrando en x obtenemos lo siguiente:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \bar{S} \Delta x \right] dt \quad (3.20)$$

Las aproximaciones que todavía deben ser hechas para el término entre corchetes dependerán de la discretización temporal adoptada: explícita, semi – implícita o totalmente implícita. Para facilitar la deducción que sigue, denominaremos $F(\phi(t))$ al término entre corchetes de la expresión 3.20, que entonces puede ser escrita como:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} F(\phi(t)) dt \quad (3.21)$$

vamos a considerar el valor de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ como uniforme en el interior del volumen de control. Con esta afirmación el lado izquierdo de (3.19) puede ser escrito como:

$$\int_w^e \left[\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \right] dx$$

integrando directamente en x

$$\int_w^e \left[\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \right] dx = (\Delta x) \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \quad (3.22)$$

combinando las aproximaciones 3.21 y 3.22, obtenemos:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt = \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} F(\phi(t)) dt \quad (3.23)$$

prosiguiendo con las integraciones, el lado izquierdo de la ecuación 3.23 puede ser integrado por el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt = (\rho\phi)_P^{n+1} - (\rho\phi)_P^n \quad (3.24)$$

Si además consideramos a ρ como constante, tenemos $\rho_P^{n+1} - \rho_P^n = \rho_P$

Si consideramos a ρ como uniforme, entonces $\rho_P = \rho$ y la expresión 3.24 puede ser escrita como:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt = \rho(\phi_P^{n+1} - \phi_P^n) \quad (3.25)$$

el lado derecho de 3.23 solo puede ser integrado si quisiéramos alguna aproximación para F , utilizando las reglas usuales de cuadratura, o integración, numérica. Como mostramos a continuación, dependiendo del nivel del tiempo en que

aproximamos F , obtendremos discretizaciones explícitas, implícitas o semi implícitas para 3.18.

Inicialmente, considérese la siguiente aproximación:

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} F(\phi(t)) dt \approx F(\phi^n)(\Delta t)$$

(3.26)

cuando se combina con la fórmula 3.25, la aproximación 3.26 queda:

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} \Delta x = F(\phi^n)$$

$$F(\phi^n) = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^n + \bar{S}^n \Delta x \quad (3.27)$$

la ecuación 3.27 no es nada más que el método de Euler explícito, pues todos los términos espaciales (Lado derecho) son validados en el nivel de tiempo n.

Se obtiene el método de Euler implícito haciendo,

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} F(\phi(t)) dt \approx F(\phi^{n+1})(\Delta t)$$

entonces:

$$\rho \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t}(\Delta x) = F(\phi^{n+1})$$

$$F(\phi^{n+1}) = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^{n+1} - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^{n+1} + \bar{S}^{n+1} \Delta x \quad (3.28)$$

El método semi- implícito de Crack – Nicolson, de $O(\Delta t)^2$, puede ser obtenido si aproximamos el lado derecho de la ecuación 3.23 por la regla del trapecio.

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} F(\phi(t)) dt \approx \frac{F(\phi^{n+1}) + F(\phi^n)}{2}(\Delta t)$$

Por lo tanto,

$$\rho \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{F(\phi^{n+1}) + F(\phi^n)}{\Delta x} \quad (3.29)$$

Suponiendo $S = 0$, Γ uniforme en todos los puntos de la malla, podemos escribir $F(\phi(t))$ como:

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right]$$

Aproximando las derivadas de la expresión anterior por diferencias centrales de segundo orden, encontramos:

$$\Gamma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] = \Gamma \left[\left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \right) \right]$$

$$\Gamma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] = \Gamma \left[\frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{\Delta x} \right] \quad (3.30)$$

resumiendo las discretizaciones temporales vistas hasta este punto, a partir de la aproximación 3.30 para $F(\phi(t))$ y la

- Ecuación 3.27, obtenemos el método de Euler explícito.

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_E^n - 2\phi_P^n + \phi_W^n}{(\Delta x)^2}$$

- Ecuación 3.28, obtenemos el método de Euler implícito

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_E^{n+1} - 2\phi_P^{n+1} + \phi_W^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

- Ecuación 3.29, obtenemos el método de Crack – Nicolson:

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = \frac{\Gamma}{2\rho} \left[\frac{\phi_E^n - 2\phi_P^n + \phi_W^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_E^{n+1} - 2\phi_P^{n+1} + \phi_W^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right]$$

las tres formulaciones anteriores pueden ser generalizadas por la expresión:

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = (1 - \Theta) \left[\frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_E^n - 2\phi_P^n + \phi_W^n}{(\Delta x)^2} \right] + \Theta \left[\frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_E^{n+1} - 2\phi_P^{n+1} + \phi_W^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] \quad (3.31)$$

En la que Θ es una constante real que varia entre 0 y 1. Para $\Theta = 0$ y $\Theta = 1$, obtenemos los métodos de Euler explícito y implícito, respectivamente que son de $O(\Delta t)$. Para $\Theta = 1/2$, obtenemos el método semi – implícito de crack – Nicolson de orden $O(\Delta t)^2$

3.2.4- Conducción bidimensional en estado transitorio

La discretización de las ecuaciones transitorias multidimensionales por la técnica de los volúmenes finitos es una extensión directa del material presentado anteriormente.

La integración de la ecuación de conducción en estado transitorio será realizada en el V.C. y en el tiempo.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad (3.32)$$

Los valores antiguos , en el instante t, serán indicados por el símbolo “o”, en cuanto los términos sin este símbolo serán evaluados en el instante $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} \int_{V.C} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} .dt.dV = \\ \int_{V.C} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) .dt.dV + \int_{V.C} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) .dt.dV + \int_{V.C} \int_t^{t+\Delta t} S_\phi .dt.dV \end{aligned} \quad (3.33)$$

La orden de integración sea en el tiempo o en el volumen, depende de la naturaleza del término. En el término transitorio la integración será primeramente realizada en el tiempo y para representación del término $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$, se asume que

ϕ representa el valor ϕ_p (variable dependiente evaluada en el punto nodal) en todo el volumen de control.

Considérese ρ constante (Flujo incomprensible) para facilitar el tratamiento:

$$\begin{aligned} \rho \int_{V.C} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\phi)}{\partial t} .dt.dV = \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) .dV .dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) .dV .dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} S_\phi .dV .dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para el término transitorio se emplea un esquema de diferenciación de primer orden en la variación temporal:

$$\rho \int_{V.C} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\phi)}{\partial t} .dt.dV = \rho \int_{V.C} [\phi_p - \phi_p^o] .dV = \rho [\phi_p - \phi_p^o] \Delta V$$

Para el término difusivo en la dirección **x**

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) .dV .dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) .dx .dy .dz .dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dy.dz.dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_{V.C} \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) .dt = \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] .dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{EP}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{PW}} \right) \right] .dt = \\
&= \int_t^{t+\Delta t} [a_E \phi_E - a_E \phi_P - a_W \phi_P + a_W \phi_W] .dt \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Se asume una hipótesis sobre la variación de ϕ_P , ϕ_E y ϕ_W entre los tiempos t y $t + \Delta t$. Varias hipótesis pueden ser asumidas, muchas de las cuales pueden ser generalizadas por el empleo de un factor que varia entre 0 y 1.

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi .dt = [f . \phi + (1-f) . \phi^o] . \Delta t \tag{3.36}$$

Aplicando la ecuación 3.36 en la ecuación 3.35

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) .dV .dt = \\
&a_E [f . \phi_E + (1-f) . \phi_E^o] . \Delta t - a_E [f . \phi_P + (1-f) . \phi_P^o] . \Delta t - \\
&a_W [f . \phi_P + (1-f) . \phi_P^o] . \Delta t + a_W [f . \phi_W + (1-f) . \phi_W^o] . \Delta t \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Reagrupando la ecuación 3.37

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV . dt = \\
 a_E \left[f \cdot \phi_E + (1-f) \cdot \phi_E^o \right] \cdot \Delta t + a_W \left[f \cdot \phi_W + (1-f) \cdot \phi_W^o \right] \cdot \Delta t + \\
 (a_E + a_W) \left[-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o \right] \cdot \Delta t
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Por analogía se concluye que el término difusivo en la dirección y,

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV . dt = \\
 a_N \left[f \cdot \phi_N + (1-f) \cdot \phi_N^o \right] \cdot \Delta t + a_S \left[f \cdot \phi_S + (1-f) \cdot \phi_S^o \right] \cdot \Delta t + \\
 (a_N + a_S) \left[-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o \right] \cdot \Delta t
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Término fuente

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{V.C} S_\phi . dV . dt &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\overline{S_\phi} \Delta V \right] . dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[S_c \Delta V + S_p \Delta V \phi_P \right] . dt = \\
 &= S_c . \Delta V . \Delta t + S_p \Delta V . \left[f \cdot \phi_P + (1-f) \cdot \phi_P^o \right] \Delta t
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Aplicando los términos anteriormente derivados en la ecuación 3.34

$$\begin{aligned}
\rho [\phi_P - \phi_P^o] \Delta V = & \\
a_E [f \cdot \phi_E + (1-f) \cdot \phi_E^o] \cdot \Delta t + a_W [f \cdot \phi_W + (1-f) \cdot \phi_W^o] \cdot \Delta t + & \\
(a_E + a_W) [-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o] \cdot \Delta t + a_N [f \cdot \phi_N + (1-f) \cdot \phi_N^o] \cdot \Delta t + & \quad (3.41) \\
a_S [f \cdot \phi_S + (1-f) \cdot \phi_S^o] \cdot \Delta t + (a_N + a_S) [-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o] \cdot \Delta t + & \\
S_c \cdot \Delta V \cdot \Delta t + S_p \Delta V \cdot [f \cdot \phi_P + (1-f) \cdot \phi_P^o] \Delta t &
\end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned}
[\phi_P - \phi_P^o] \rho \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = & \\
a_E [f \cdot \phi_E + (1-f) \cdot \phi_E^o] + a_W [f \cdot \phi_W + (1-f) \cdot \phi_W^o] + (a_E + a_W) [-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o] + & \\
a_N [f \cdot \phi_N + (1-f) \cdot \phi_N^o] + a_S [f \cdot \phi_S + (1-f) \cdot \phi_S^o] + (a_N + a_S) [-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o] + & \\
S_c \cdot \Delta V + S_p \Delta V \cdot [f \cdot \phi_P + (1-f) \cdot \phi_P^o] &
\end{aligned}$$

$$\text{Se define } a_P^o = \rho \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)$$

$$\begin{aligned}
\left[\phi_P - \phi_P^o \right] a_P^o = & \\
\left[a_E f \cdot \phi_E \right] + \left[a_W f \cdot \phi_W \right] + \left[a_N f \cdot \phi_N \right] + \left[a_S f \cdot \phi_S \right] + a_E (1-f) \cdot \phi_E^o + a_W (1-f) \cdot \phi_W^o + & \\
a_N (1-f) \cdot \phi_N^o + a_S (1-f) \cdot \phi_S^o + (a_E + a_W) \left[-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o \right] + & \\
(a_N + a_S) \left[-f \cdot \phi_P - (1-f) \cdot \phi_P^o \right] + S_c \cdot \Delta V + S_p \Delta V \cdot \left[f \cdot \phi_P + (1-f) \cdot \phi_P^o \right] &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\phi_P a_P^o - \phi_P^o a_P^o \right] = & \\
a_E \left[f \cdot \phi_E + (1-f) \cdot \phi_E^o \right] + a_W \left[f \cdot \phi_W + (1-f) \cdot \phi_W^o \right] + & \\
a_N \left[f \cdot \phi_N + (1-f) \cdot \phi_N^o \right] + a_S \left[f \cdot \phi_S + (1-f) \cdot \phi_S^o \right] + & \quad (3.42) \\
(\phi_P^o) \left[-(1-f)a_E - (1-f)a_W - (1-f)a_N - (1-f)a_S \right] + & \\
(-f \cdot \phi_P) \left[a_E + a_W + a_N + a_S \right] + S_c \cdot \Delta V + S_p \Delta V \cdot \left[f \cdot \phi_P + (1-f) \cdot \phi_P^o \right] &
\end{aligned}$$

dando forma,

$$\begin{aligned}
\left[\phi_P a_P^o \right] = & a_E \left[f \phi_E + (1-f) \phi_E^o \right] + a_W \left[f \phi_W + (1-f) \phi_W^o \right] + a_N \left[f \phi_N + (1-f) \phi_N^o \right] + \\
& a_S \left[f \phi_S + (1-f) \phi_S^o \right] + (-f \phi_P) \left[a_E + a_W + a_N + a_S \right] + S_c \cdot \Delta V + \\
S_p \Delta V \cdot \left[f \cdot \phi_P + (1-f) \cdot \phi_P^o \right] + & (\phi_P^o) \left[-(1-f)a_E - (1-f)a_W - (1-f)a_N - (1-f)a_S + a_P^o \right]
\end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned}
& (\phi_p)[fa_E + fa_W + fa_N + fa_S - fS_p\Delta V] = \\
& a_E[f\phi_E + (1-f)\phi_E^o] + a_W[f\phi_W + (1-f)\phi_W^o] + a_N[f\phi_N + (1-f)\phi_N^o] + \\
& a_S[f\phi_S + (1-f)\phi_S^o] + S_c\Delta V + (1-f)S_p\Delta V\phi_p^o - [\phi_p a_p^o] + \\
& [-(1-f)a_E - (1-f)a_W - (1-f)a_N - (1-f)a_S + a_p^o](\phi_p^o) +
\end{aligned} \tag{3.43}$$

por último si:

$$a_p = [fa_E + fa_W + fa_N + fa_S - fS_p\Delta V]$$

$$b = S_c\Delta V + (1-f)S_p\Delta V\phi_p^o - [\phi_p a_p^o]$$

$$a_E = \Gamma_e A_e / \delta x_{PE}$$

$$a_W = \Gamma_w A_w / \delta x_{WP}$$

$$a_N = \Gamma_n A_n / \delta x_{PN}$$

$$a_S = \Gamma_s A_s / \delta x_{SP}$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (\phi_p) a_p = & a_E \left[f \phi_E + (1-f) \phi_E^o \right] + a_W \left[f \phi_W + (1-f) \phi_W^o \right] + \\ & a_N \left[f \phi_N + (1-f) \phi_N^o \right] + a_S \left[f \phi_S + (1-f) \phi_S^o \right] + \\ & \left[-(1-f) a_E - (1-f) a_W - (1-f) a_N - (1-f) a_S + a_p^o \right] (\phi_p^o) + b \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.3- Resultados Numéricos

En los capítulos anteriores se mostró una descripción del método de volúmenes finitos aplicado a la conducción de calor, lo que veremos a continuación será la aplicación de esta metodología mediante la implementación de un programa computacional.

3.3.1- Cálculo para la conducción en estado estable (1D)

Este capítulo se resuelve numéricamente y vía implementación de un programa computacional, situaciones en las que el calor se transfiere por conducción en condiciones de estado estable. La ecuación gobernante con estas condiciones es la ecuación 3.4, esta ecuación la volvemos a definir pero usando una notación diferente a la mostrada en el capítulo 3.2.1.

$$\Gamma \phi_{xx}(x) + S = 0 \quad (3.45)$$

El programa diseñado C1E resuelve esta ecuación. Este programa fue escrito en Fortran y posee una interfaz gráfica en Matlab.

El programa C1E es un sub programa del programa RUPAY-10X, este programa RUPAY-10X abarca todos los casos de conducción de calor estudiados hasta el momento. Al ejecutarse el programa RUPAY-10X éste nos pide que tipo de análisis queremos realizar, para este caso escogemos la opción C1E, al ejecutarse esta opción aparece por pantalla un cuadro semejante al mostrado en la figura 3.7.

Programa C1E: (Método de Volúmenes Finitos para la ecuación de conducción de calor en estado estacionario): $\Gamma \phi_{xx}(x) + S = 0 \quad / \quad 0 \leq x \leq a$
 CC: $\phi(0) = C_a \quad \wedge \quad \phi(a) = C_b$

Fig. 3.7- Presentación en pantalla del programa C1E.

Posteriormente el programa nos pedirá que ingresemos las variables. Si por ejemplo quisiéramos analizar la transferencia de calor en una barra de longitud

de 500 cm. que tiene un coeficiente de conductividad de 100 W/ m.K. Además está aislada y sin fuentes de calor; las puntas son mantenidas a una temperatura constante de 100 °C y 500 °C respectivamente. Si hemos ingresado estos valores correctamente obtenemos un archivo con los resultados obtenidos, estos resultados se exportan a Matlab donde serán graficados. Los datos obtenidos representan la distribución de temperaturas en la barra.

Estos datos producto de la simulación numérica y del desarrollo de la solución analítica son representados en la tabla 3.1 y en la figura 3.8 que se muestran a continuación:

X(m)	Solución Numérica	Solución Exacta	Error Relativo Porcentual Verdadero
-------------	------------------------------	----------------------------	--

0.000000	100.000000	100.0000	0 %
0.016667	113.333333	113.3336	0.00023559 %
0.050000	140.000000	140.0000	0 %
0.083333	166.666667	166.6664	0.0001602 %
0.116667	193.333333	193.3336	0.0001381 %
0.150000	220.000000	220.0000	0 %
0.183333	246.666667	246.6664	0.00010824 %
0.216667	273.333333	273.3336	9.7683e-005 %
0.250000	300.000000	300.0000	0 %
0.283333	326.666667	326.6664	8.1735e-005%
0.316667	353.333333	353.3336	7.5566e-005%
0.350000	380.000000	380.0000	0%
0.383333	406.666667	406.6664	6.5656e-05 %
0.416667	433.333333	433.3336	6.1615e-005 %
0.450000	460.000000	460.0000	0 %
0.483333	486.666667	486.6664	5.4863e-005 %
0.500000	500.000000	500.0000	0 %

Tabla 3.1- Distribución de temperaturas en la barra en estado estable

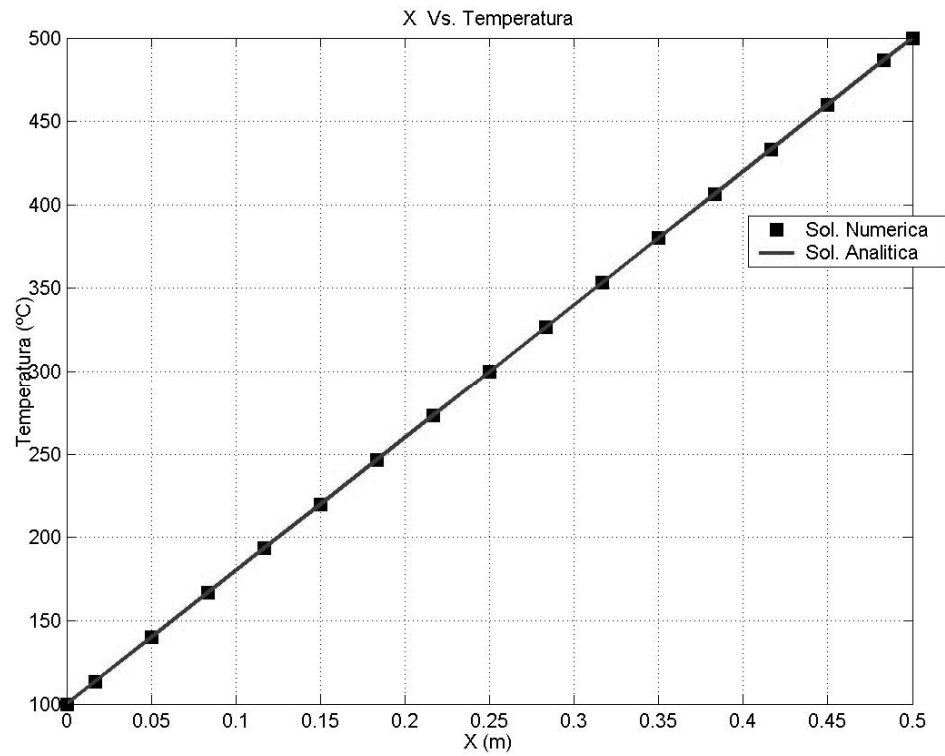


Fig. 3.8- Comparación de los resultados numéricos con la solución analítica.

3.3.2 Cálculo para la conducción en estado estable (2D)

La ecuación gobernante para la conducción de calor bidimensional en estado estable es la ecuación 3.11, esta ecuación la volvemos a definir pero usando la notación que empleamos en el capítulo 3.2.2.

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0 \quad (3.46)$$

Para resolver la ecuación 3.46 se diseñó el programa C2E, que al igual que el programa C1E fue escrito en Fortran y posee una interfaz gráfica en Matlab.

Al ejecutarse el programa C2E aparece por pantalla un cuadro semejante al siguiente. (Figura 3.9)

Programa C2E: (Método de Volúmenes Finitos para la ecuación de conducción de calor en estado estacionario): $\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0 \quad / \quad 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq b$
 CC: $\phi(x, 0) = f_1(x) \quad \phi(x, b) = f_2(x) \quad / \quad 0 \leq x \leq a$
 $\phi(0, y) = f_3(y) \quad \phi(a, y) = f_4(y) \quad / \quad 0 \leq y \leq b$

Fig. 3.9- Presentación en pantalla del programa C2E.

Posteriormente el programa nos pedirá que ingresemos las variables. Si por ejemplo quisiéramos analizar la transferencia de calor en una placa cuadrada la cual esta definida por $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$, con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} T(x, 0) = 0 \quad \text{y} \quad T(x, 5) = 180 \quad \text{para} \quad 0 < x < 5 \\ T(0, y) = 0 \quad \text{y} \quad T(5, y) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < y < 5 \end{aligned}$$

Si hemos ingresado estos valores correctamente obtenemos un archivo con los resultados obtenidos, estos resultados representan la distribución de temperaturas en la placa. Posteriormente la data se exporta a Matlab donde serán graficados.

Estos datos, producto de la simulación numérica y del desarrollo de la solución analítica son representados respectivamente en las figuras 3.10 y 3.11. la figura 3.12 también representa la solución numérica de este problema pero fue obtenida mediante el software comercial Femlab.

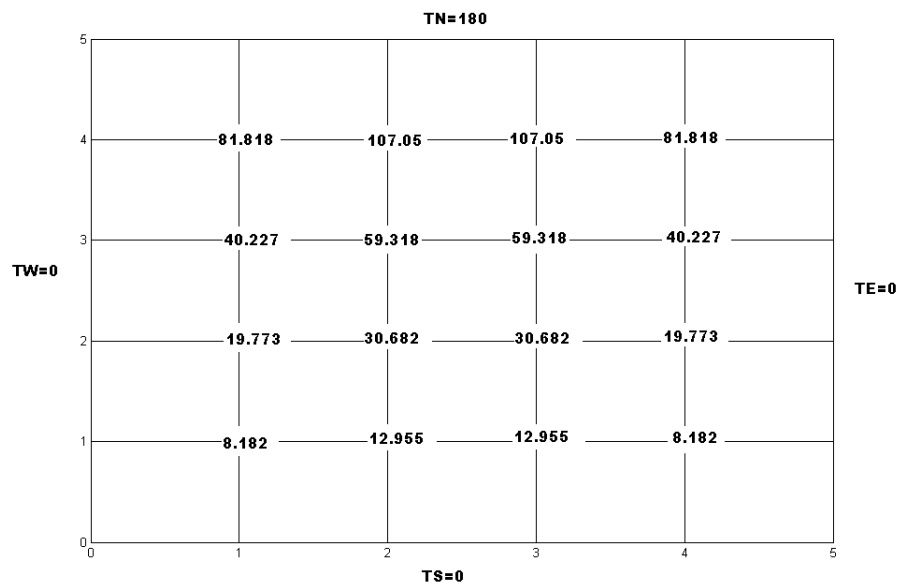


Fig. 3.10- Distribución de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos.

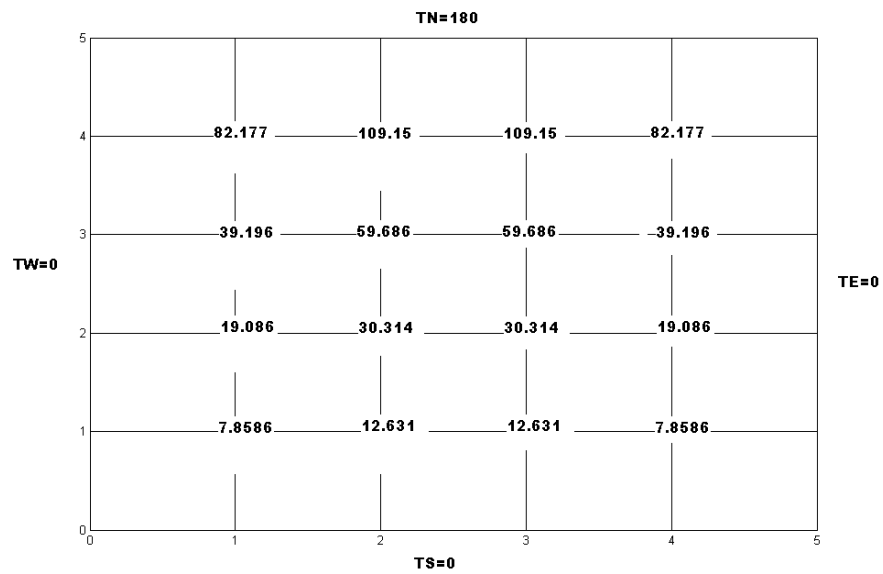


Fig. 3.11- Distribución de temperaturas obtenido mediante el método analítico.

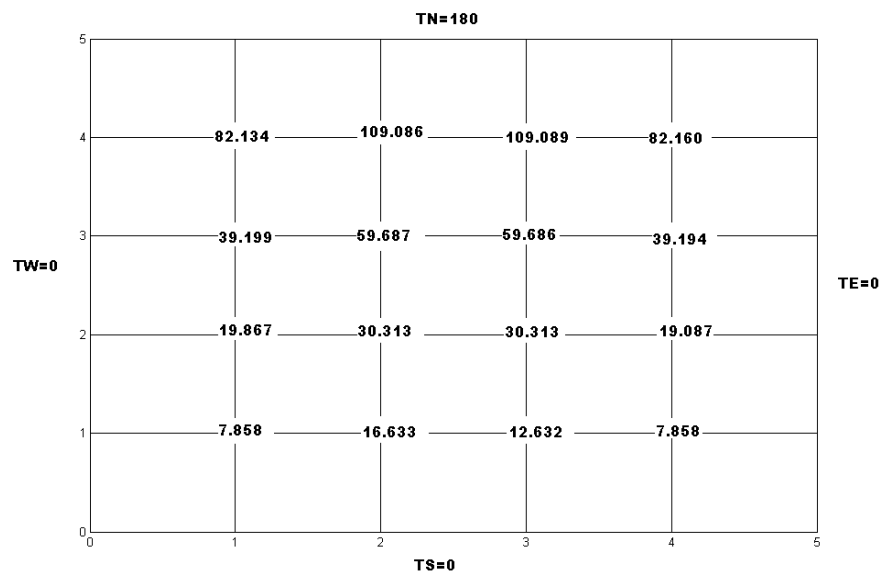


Fig. 3.12- Distribución de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB.

La distribución de los contornos de temperaturas de la solución numérica se representa en la figura 3.13, la solución analítica en la figura 3.14 y la solución numérica mediante el software comercial Femlab es presentado en la figura 3.15.

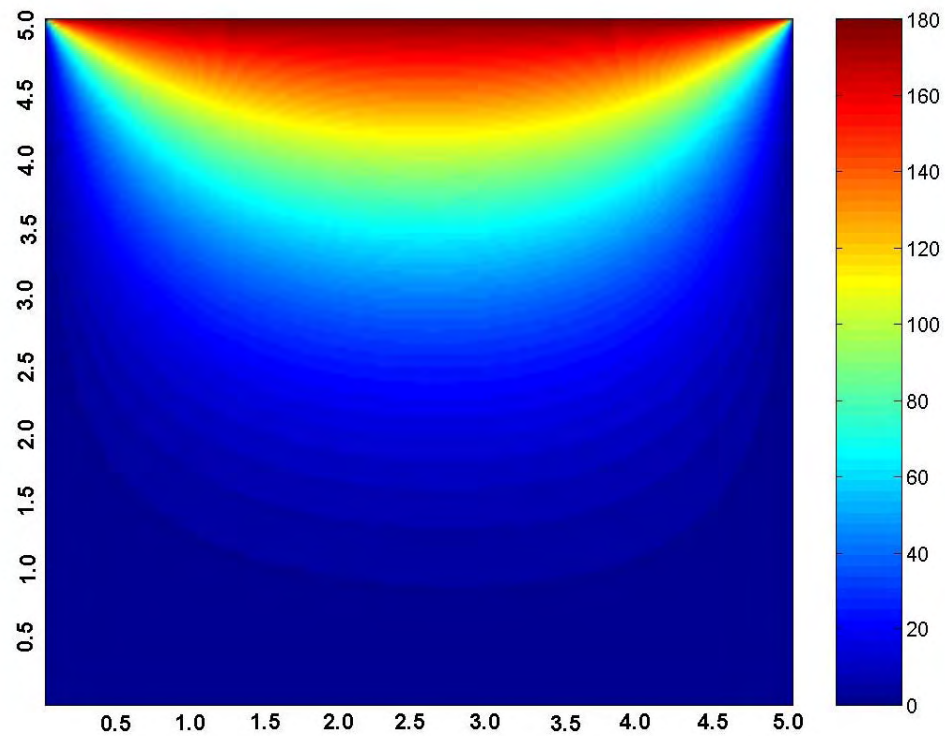


Fig. 3.13- Contorno de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos.

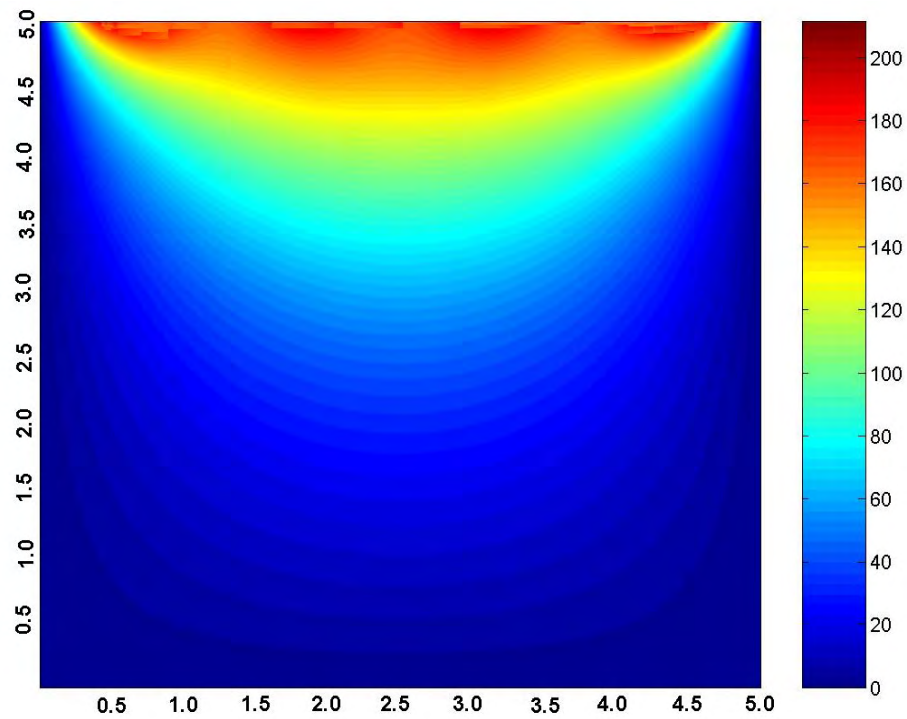


Fig. 3.14- Contorno de temperaturas obtenido mediante el método analítico.

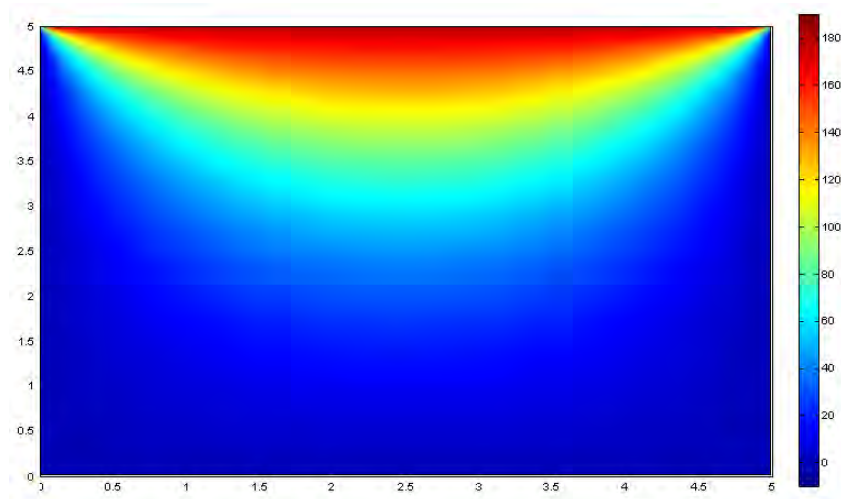


Fig. 3.15- Contorno de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB.

3.3.3 Cálculo para la conducción en estado transitorio (1D)

En este capítulo resolvemos numéricamente vía implementación de un programa computacional situaciones en las que el calor se transfiere por conducción en condiciones de estado transitorio. La ecuación gobernante con estas condiciones es la ecuación 3.18, esta ecuación la volvemos a definir pero usando una notación diferente a la mostrada en el capítulo 3.2.3.

$$\phi_t(x,t) = C\phi_{xx}(x,t) \quad (3.47)$$

Para resolver la ecuación 3.47 se diseñó el programa C1T, que fue escrito en Fortran y posee una interfaz grafica en Matlab.

Al ejecutarse el programa C1T aparece por pantalla un cuadro semejante al mostrado en la figura 3.16.

Programa C1T: (Método de Volúmenes Finitos para la ecuación de conducción de calor en estado transitorio): $\phi_t(x,t) = C\phi_{xx}(x,t) \quad / \quad 0 \leq x \leq a \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq b$
C.I: $\phi(x,0) = f(x) \quad / \quad t = 0 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq a$
CC: $\phi(0,t) = C_a \quad / \quad x = 0 \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq b, \quad \phi(a,t) = C_b \quad / \quad x = a \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq b$

Fig. 3.16- Presentación en pantalla del programa C1T.

A continuación el programa nos pedirá que ingresemos las variables. Si quisiéramos calcular la distribución de temperaturas en una barra larga y delgada que tiene una longitud de 10 m y los siguientes valores: coeficiente de difusividad de $1 \text{ m}^2/\text{s}$, en $t=0$, la temperatura de la barra es cero, y las condiciones de frontera están fijas en cada momento en $T(0)=0^\circ\text{C}$ y $T(10)=500^\circ\text{C}$.

Luego de haber ingresado los valores correctamente obtenemos un archivo con los resultados obtenidos, en el instante de tiempo $t=3 \text{ seg}$. Estos datos son producto de la simulación numérica y del desarrollo de la solución analítica.

Los datos productos de la solución numérica obtenidas mediante el programa C1T son comparados con la solución analítica y representados en la tabla 3.2 así como en la figura 3.17.

x	T. Analítica	T. Numérica	Error Relativo Porcentual
0	0	0	
1	0.11573	0.32735	182.86
2	0.54494	1.0658	95.581
3	2.1333	3.0674	43.787
4	7.1529	8.3965	17.386
5	20.613	21.743	5.482
6	51.235	52.203	1.8893
7	110.34	112.45	1.9123
8	207.11	207.99	0.42489
9	341.55	343.45	0.55629
10	500	500	

Tabla 3.2- Distribución de temperaturas en la barra en estado transitorio

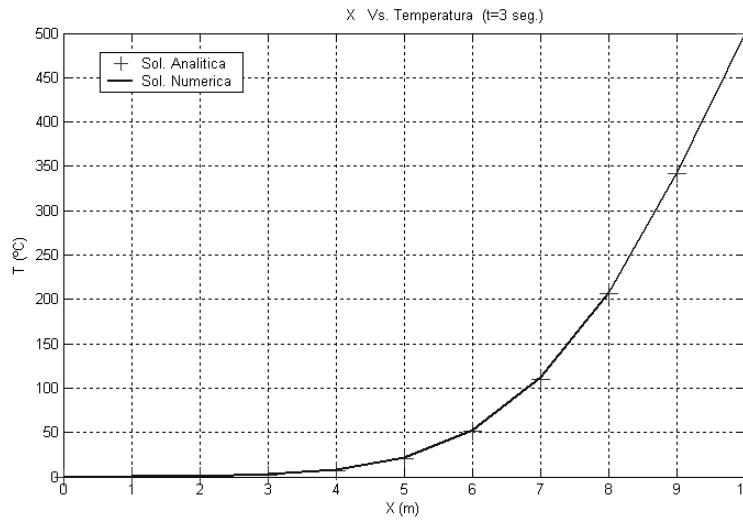


Fig. 3.17- Comparación de los resultados numéricos con la solución analítica.

3.3.4 Cálculo para la conducción en estado transitorio (2D)

La ecuación gobernante para la conducción de calor bidimensional en estado transitorio es la ecuación 3.32, esta ecuación la volvemos a definir pero usando la notación que empleamos en el capítulo 3.2.4.

$$\phi_{xx}(x, y, t) + \phi_{yy}(x, y, t) = \alpha \phi_t(x, y, t) \quad (3.48)$$

Para resolver la ecuación 3.48 se diseñó el programa C2T, que al igual que el programa C1T fue escrito en Fortran y posee una interfaz gráfica en Matlab.

Al ejecutarse el programa C2T aparece por pantalla un cuadro semejante al siguiente (Figura 3.18)

Programa C2T: (Método de Volúmenes Finitos para la ecuación de conducción de calor en estado transitorio): $\phi_{xx}(x, y, t) + \phi_{yy}(x, y, t) = \alpha \phi_t(x, y, t)$ C.I: $\phi(x, y, 0) = f(x, y)$ CC: $\phi(x, 0, t) = f_1 \quad \phi(x, b, t) = f_2 \quad \phi(0, y, t) = f_3 \quad \phi(a, y, t) = f_4$
--

Fig. 3.18- Presentación en pantalla del programa C2T.

Posteriormente el programa nos pedirá que ingresemos las variables. Si por ejemplo quisiéramos determinar la evolución temporal de la temperatura en una placa en los instantes de tiempo $t=0$ y $t=20$ seg. La placa es una placa plana de 1m por 1m, hecha de un material que posee difusividad térmica igual a $0.0155 \text{ m}^2/\text{s}$. La placa esta inicialmente a 25°C y sus bordes superiores e inferiores son colocados a las temperaturas de 100°C y 20°C respectivamente. Los bordes laterales son colocados a 30°C .

Si hemos ingresado estos valores correctamente obtenemos un archivo con los resultados obtenidos en los instantes de tiempo $t=0$ y $t=20$ Seg. estos resultados representan la distribución de temperaturas en la placa. Posteriormente la data se exporta a Matlab donde serán graficados.

Estos datos producto de la simulación numérica obtenidos mediante el programa C2T son representados en las figuras 3.19 y 3.20. las figuras 3.21 y 3.22 también representan la solución numérica de este problema pero fueron obtenidas mediante el software comercial Femlab.

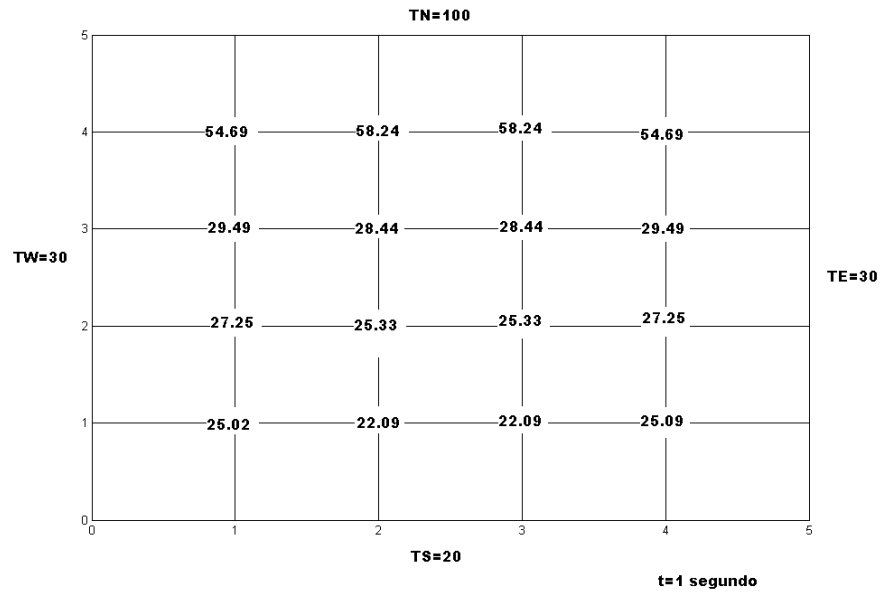


Fig. 3.19- Distribución de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=1$ Seg.

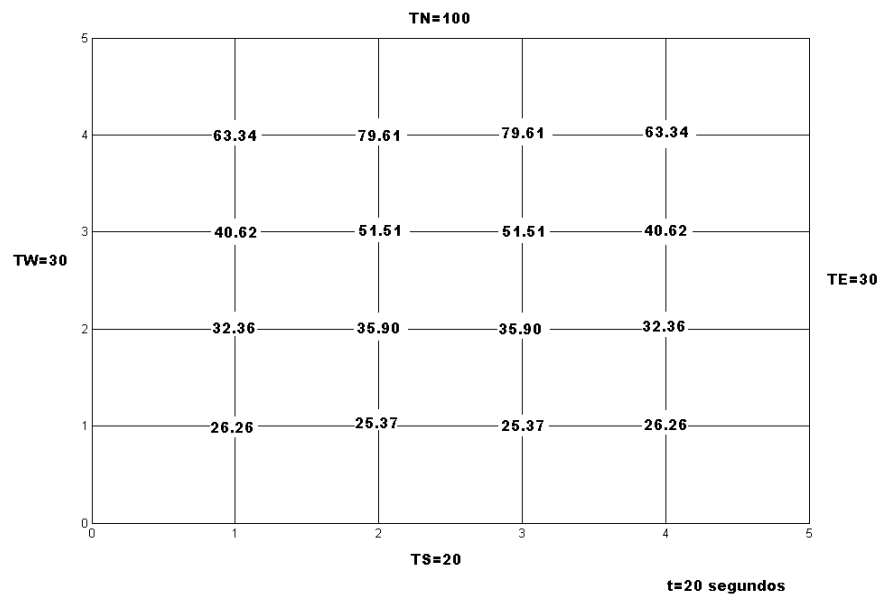


Fig. 3.20- Distribución de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=20$ Seg.

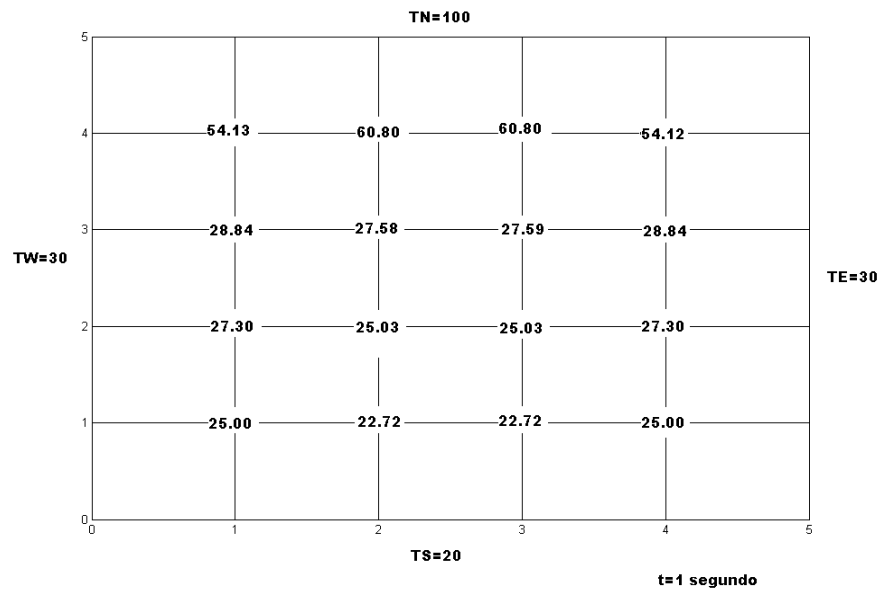


Fig. 3.21- Distribución de temperaturas, obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=1$ Seg.

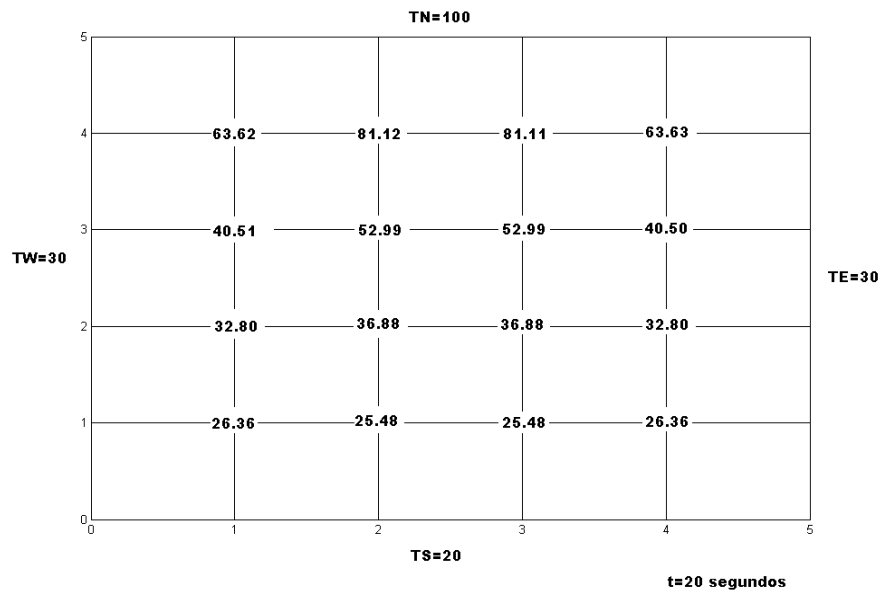


Fig. 3.22- Distribución de temperaturas, obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=20$ Seg.

La distribución de contornos de temperatura obtenidos mediante el método de VF para los instantes de tiempo ($t=1$ y $t=20$ Seg.) se muestra en las figuras 3.23 y 3.24.

La solución obtenida mediante el programa comercial Femlab para los instantes de tiempo analizado se muestra en las figuras 3.25 y 3.26.

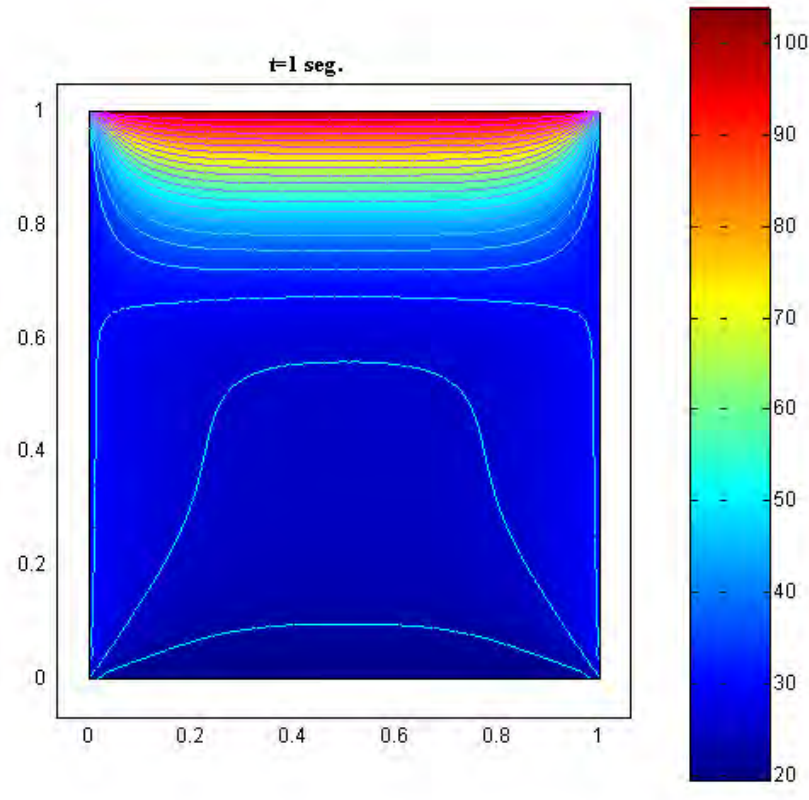


Fig. 3.23- Contorno de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=1$ seg.

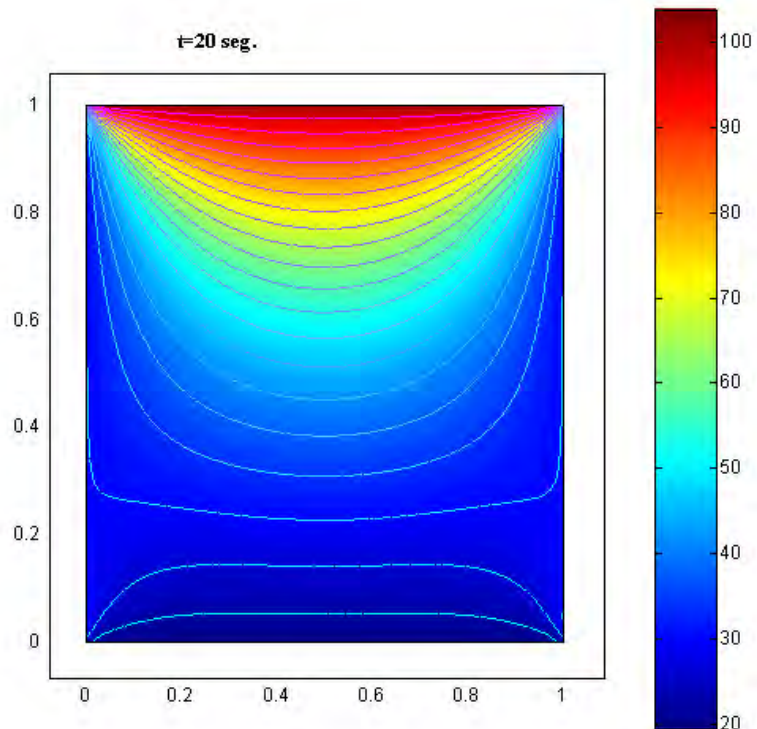


Fig. 3.24- Contorno de temperaturas obtenido mediante el método numérico de volúmenes finitos para $t=20$ seg.

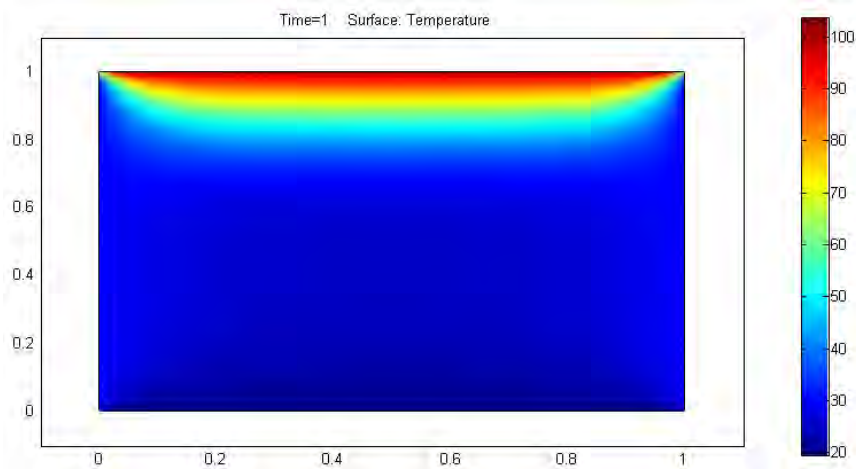


Fig. 3.25- Contornos de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=1$ seg.

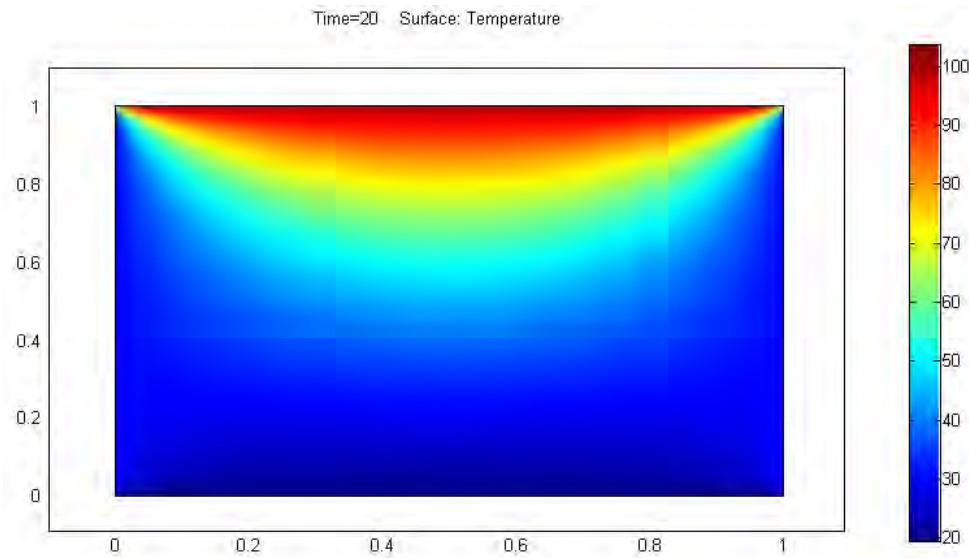


Fig. 3.26- Contornos de temperaturas obtenido mediante el software comercial FEMLAB para $t=20$ seg.

CAPITULO IV

IV- CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES DE AERODINÁMICA

4.1- Definición De Aerodinámica

La Aerodinámica es la rama de la mecánica de fluidos que estudia las leyes que regulan los movimientos de los gases, especialmente del aire y las fuerzas o reacciones que se desarrollan entre la atmósfera y los cuerpos que se hallan en su interior cuando existe un movimiento relativo entre dichos cuerpos y el aire.

Hay ciertas leyes de la aerodinámica, aplicables a cualquier objeto moviéndose a través del aire, que explican el vuelo de objetos más pesados que el aire. Por tal motivo es importante que se obtenga el mejor conocimiento posible de estas leyes y principios para entender, analizar y predecir el rendimiento de un cuerpo moviéndose a través del aire en cualesquiera condiciones de operación.

Las definiciones presentadas en este capítulo no pretenden dar una explicación exhaustiva ni detallada de las complejidades de la aerodinámica, sino mas bien, presentar un esquema general.

4.2- Perfil Alar

En aeronáutica se denomina *perfil alar* o simplemente *perfil*, a la forma plana que al desplazarse a través del aire es capaz de crear a su alrededor una distribución de presiones que genere sustentación.

Según el propósito que se persiga en el diseño, los perfiles pueden ser más finos o gruesos, curvos o poligonales, simétricos o no, e incluso el perfil puede ir variando a lo largo del ala.

4.2.1- Terminología

- **La línea de cuerda** es una línea recta que une el borde de ataque y el borde de fuga del perfil.

- **La cuerda** es la longitud de la línea anterior.
- **La línea de curvatura media** es la línea media entre el extradós y el intradós.
- **Curvatura máxima** es la distancia máxima entre la línea de curvatura media y la línea de cuerda.
- **Espesor máximo** es la distancia máxima entre la superficie superior e inferior (extradós e intradós).
- **Radio del borde de ataque** es una medida del afilamiento del borde de ataque. Puede variar desde 0, para perfiles supersónicos afilados, hasta un 2 por 100 (de la cuerda) para perfiles más bien achatados.

Algunos de estos conceptos son mostrados en la figura 4.1

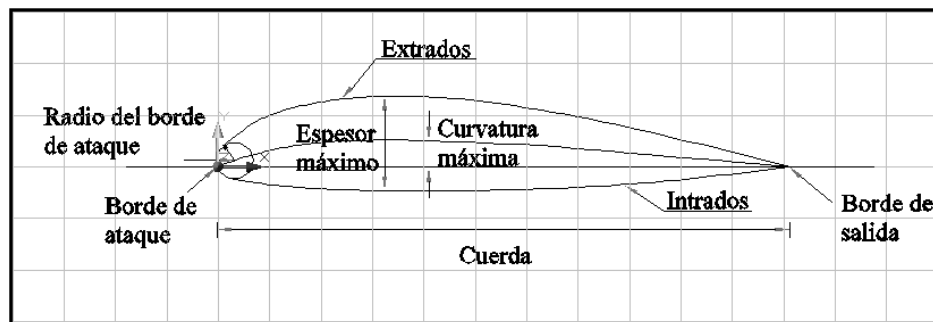


Fig. 4.1- Perfil alar.

4.2.2.- Variables geométricas en los perfiles

En la geometría de un perfil existen cuatro variables principales:

1. Configuración de la línea de curvatura media. Si esta línea coincide con la línea de cuerda, el perfil es simétrico.

En los perfiles simétricos la superficie superior e inferior tiene la misma forma y equidistan de la línea de cuerda.

2. Espesor.
3. Localización del espesor máximo.
4. Radio del borde de ataque.

4.2.3- Clasificación de los perfiles

La mayor parte del desarrollo de perfiles en los Estados Unidos ha sido realizado a partir de 1929 por el Comité Nacional de Aeronáutica (NACA), que fue precursor de la Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio (NASA). Las primeras series estudiadas fueron las llamadas “de cuatro dígitos”. El primero de los dígitos daba la curvatura en porcentaje de la cuerda; el segundo daba la posición de la curvatura máxima en décimas de la cuerda y los dos últimos dígitos el espesor máximo en porcentaje de la cuerda. Por ejemplo , un perfil NACA 2415 tiene la curvatura máxima del 2 % de la cuerda, situada en el punto del 40 % de la cuerda (medido desde el borde de ataque) y con un espesor máximo del 15 % de la cuerda. El perfil NACA 0012 es un perfil simétrico (de curvatura 0) y con un espesor del 12 % de la cuerda.

Las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 muestran alguno de estos perfiles.

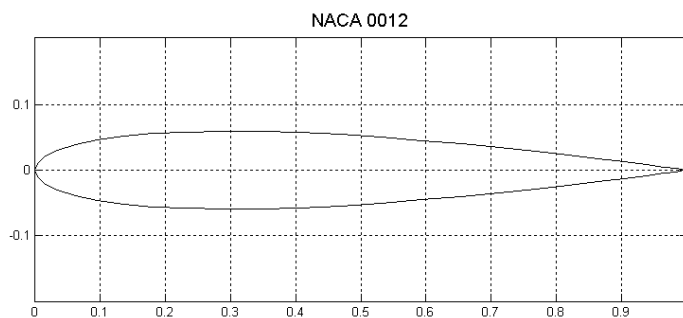


Fig. 4.2- Perfil NACA 0012.

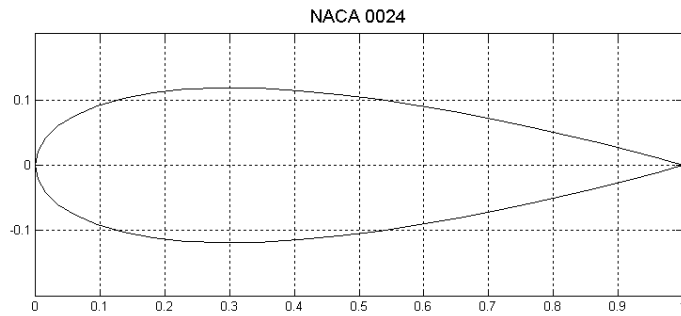


Fig. 4.3 - Perfil NACA 0024.

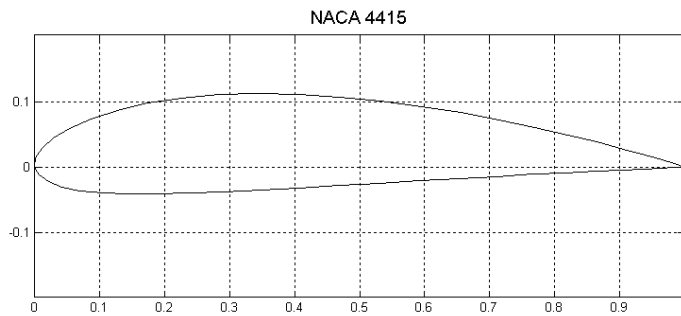


Fig. 4.4- Perfil NACA 4415.

4.3 Fuerzas Que Actúan En Vuelo

Sobre un cuerpo en vuelo actúan una serie de fuerzas, favorables unas y desfavorables otras, siendo una tarea primordial ejercer control sobre ellas para mantener un vuelo seguro y eficiente.

De todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en vuelo, las básicas y principales son cuatro:

1. Sustentación
2. Peso
3. Empuje
4. Resistencia.

Estas cuatro fuerzas actúan en pares; la sustentación es opuesta al peso, y el empuje o tracción a la resistencia.

Un cuerpo se mantiene estático en el suelo debido a la acción de dos fuerzas: su peso, debido a la gravedad, que lo mantiene en el suelo, y la inercia o resistencia al avance que lo mantiene parado. Para que este cuerpo vuele será necesario contrarrestar el efecto de estas dos fuerzas negativas, peso y resistencia, mediante otras dos fuerzas positivas de sentido contrario, sustentación y empuje respectivamente. Así, el empuje ha de superar la resistencia que opone el cuerpo a avanzar, y la sustentación superar el peso del cuerpo manteniéndolo en el aire.

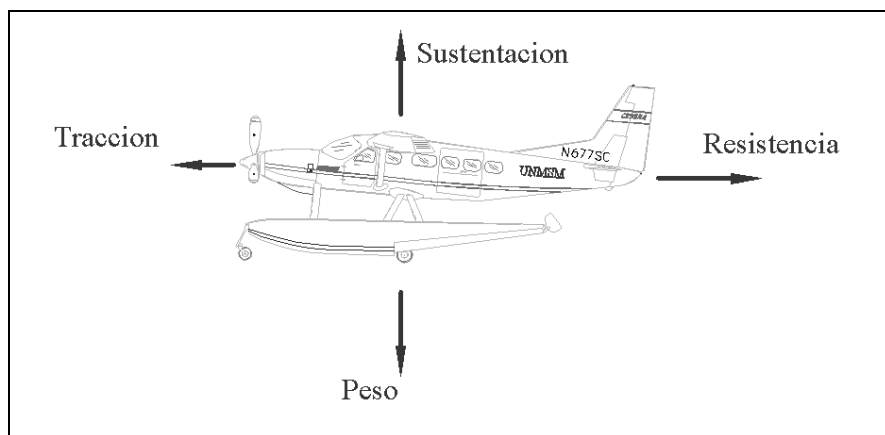


Fig. 4.5- Fuerzas que actúan en vuelo.

4.3.1 Sustentación.

Podemos definir a la sustentación como la fuerza que empuja a un objeto hacia arriba en dirección opuesta al peso.

En el caso de un avión la elevación es creada por el movimiento del aire alrededor de las alas. El aire que se mueve sobre el ala lo hace con una velocidad distinta al aire que se mueve por debajo de el ala, creando así la sustentación. Hay dos maneras de lograr que esto suceda. Las alas pueden tener una superficie superior curvada y una superficie inferior más plana. Esto hace que el aire que fluye sobre la superficie superior de el ala se mueva más rápidamente.

También se puede utilizar un ala plana y hacer que vuele con un ángulo de ataque con respecto al viento. Esta ala inclinada hace que el aire se mueva más rápidamente sobre ella, creando sustentación.

Los principales factores que afectan a la sustentación son los siguientes:

- a. ***La forma del perfil del ala.*** Hasta cierto límite, a mayor curvatura del perfil mayor diferencia de velocidad entre las superficies superior e inferior del ala y por tanto mayor diferencia de presión, o lo que es igual mayor fuerza de sustentación. No obstante no hay que confundirse pensando que es necesario que el ala sea curvada por arriba y plana o cóncava por abajo para producir sustentación, pues un ala con un perfil simétrico también la produce. Lo que ocurre es que un ala ligeramente curvada entra en pérdida con un ángulo de ataque mucho mayor que un ala simétrica, lo que significa que tanto su coeficiente de sustentación como su resistencia a la pérdida son mayores. La curvatura de un ala típica moderna es solo de un 1% o de un 2%. La razón por la cual no se hace más curvada, es que un incremento de esta curvatura requeriría una superficie inferior cóncava, lo cual ofrece dificultades de construcción. Otra razón, es que una gran curvatura solo es realmente beneficiosa en velocidades cercanas a la pérdida (despegue y aterrizaje), y para tener más sustentación en esos momentos es suficiente con extender los flaps.
- b. ***La superficie alar.*** Cuanto más grandes sean las alas mayor será la superficie sobre la que se ejerce la fuerza de sustentación. Pero hay que tener en cuenta que perfiles muy curvados o alas muy grandes incrementan la resistencia del avión al ofrecer mayor superficie enfrentada a la corriente de aire.

- c. **La densidad del aire.** Cuanto mayor sea la densidad del aire, mayor es el número de partículas por unidad de volumen que cambian velocidad por presión y producen sustentación.
- d. **La velocidad del viento relativo.** A mayor velocidad sobre el perfil, mayor es la sustentación. La sustentación es proporcional al cuadrado de la velocidad, siendo por tanto este factor el que comparativamente más afecta a la sustentación.
- e. **El ángulo de ataque.** Si se aumenta el ángulo de ataque es como si se aumentara la curvatura de la parte superior del perfil, o sea el estrechamiento al flujo de aire, y por tanto la diferencia de presiones y en consecuencia la sustentación. No obstante un excesivo ángulo de ataque puede provocar la entrada en pérdida.

En la Figura 4.6 se ve de forma general como aumenta el coeficiente de sustentación (CL) con el ángulo de ataque hasta llegar al CL máximo, a partir del cual la sustentación disminuye con el ángulo de ataque. Los valores y la forma de la curva en la gráfica dependerán de cada perfil concreto.

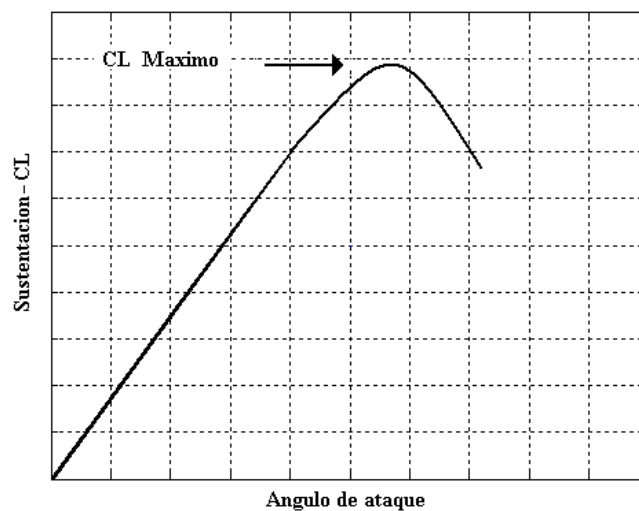


Fig. 4.6: Coeficiente de sustentación vs. ángulo de ataque.

La fórmula de la sustentación (en ingles “Lifth”) seria: $L=CL*q*S$ donde **CL** es el coeficiente de sustentación, dependiente del tipo de perfil y del ángulo de ataque; **q** la presión aerodinámica ($1/2\rho v^2$ siendo ρ la densidad y v la velocidad del viento relativo) y **S** la superficie alar.

Es obvio que solo se puede tener influencia en la sustentación actuando sobre los factores velocidad y ángulo de ataque, pues el coeficiente aerodinámico y la superficie alar están predeterminadas por el diseño, y la densidad del aire depende del estado de la atmósfera.

4.3.2 Peso

El peso es la fuerza de atracción gravitatoria sobre un cuerpo, siendo su dirección perpendicular a la superficie de la tierra, su sentido hacia abajo, y su intensidad proporcional a la masa de dicho cuerpo. Esta fuerza es la que atrae al avión hacia la tierra y ha de ser contrarrestada por la fuerza de sustentación para mantener al avión en el aire.

4.3.3 Empuje o tracción

Para vencer la inercia del avión se necesita una fuerza: el empuje o tracción. Esta fuerza se obtiene acelerando una masa de aire a una velocidad mayor que la del aeroplano. La reacción, de igual intensidad pero de sentido opuesto, mueve el avión hacia adelante. En aviones de hélice, la fuerza de propulsión la genera la rotación de la hélice, movida por el motor (convencional o turbina); en reactores, la propulsión se logra por la expulsión violenta de los gases quemados por la turbina.

Esta fuerza se ejerce en la misma dirección a la que apunta el eje del sistema propulsor, que suele ser más o menos paralela al eje longitudinal del avión.

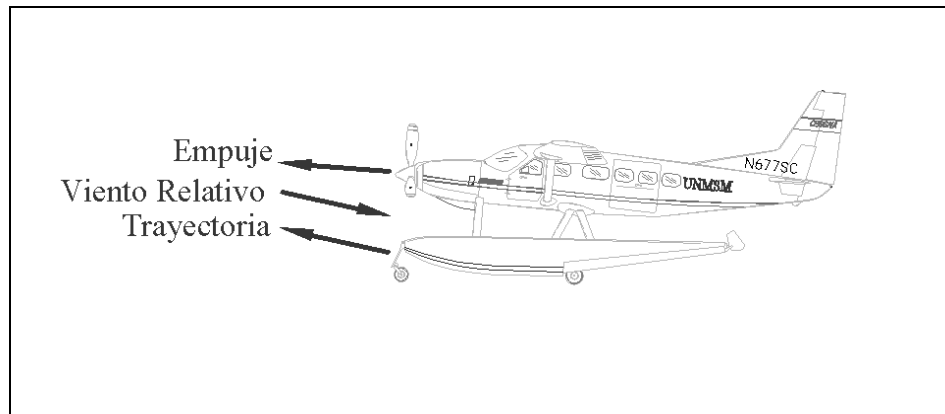


Fig. 4.7- Dirección y sentido del empuje.

Es obvio que el factor principal que influye en esta fuerza es la potencia del motor, pero hay otros elementos que también influyen como pueden ser la forma y tamaño de la hélice, octanaje del combustible, densidad del aire, etc.

Puesto que potencia es equivalente a energía por unidad de tiempo, a mayor potencia mayor capacidad de aceleración.

La potencia es el factor más importante a la hora de determinar la tasa de ascenso de un avión.

4.3.4 Resistencia

La resistencia es la fuerza que impide o retarda el movimiento de un aeroplano. La resistencia actúa de forma paralela y en la misma dirección que el viento relativo, aunque también podríamos afirmar que la resistencia es paralela y de dirección opuesta a la trayectoria.

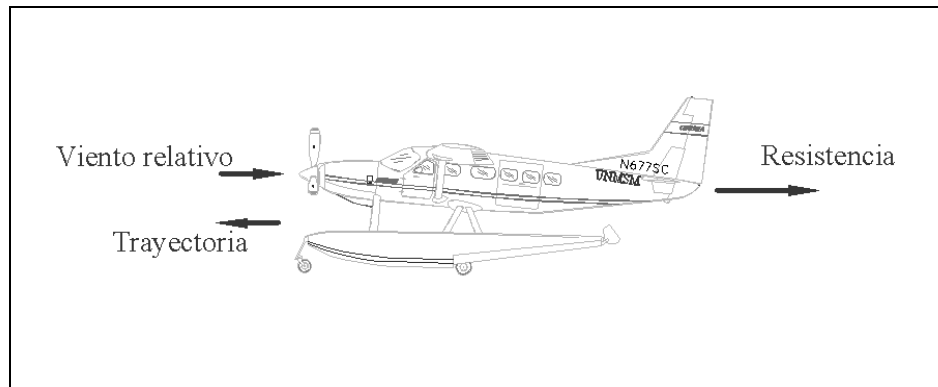


Fig. 4.8- Dirección y sentido de la resistencia.

Desde un punto de vista aerodinámico, cuando un ala se desplaza a través del aire hay dos tipos de resistencia: (a) resistencia debida a la fricción del aire sobre la superficie del ala y, (b) resistencia por la presión del propio aire oponiéndose al movimiento de un objeto en su seno.

La resistencia por fricción es proporcional a la viscosidad, que en el aire es muy baja, de manera que la mayoría de las veces esta resistencia es pequeña comparada con la producida por la presión, mientras que la resistencia debida a la presión depende de la densidad de la masa de aire. Ambas resistencias crean una fuerza proporcional al área sobre la que actúan y al cuadrado de la velocidad. Una parte de la resistencia por presión que produce un ala depende de la cantidad de sustentación producida; a esta parte se le denomina resistencia inducida, denominándose resistencia parásita a la suma del resto de resistencias.

La fórmula de la resistencia (en ingles "drag") tiene la misma forma que la de la sustentación: $D = C_D \cdot q \cdot S$ donde C_D es el coeficiente de resistencia, dependiente del tipo de perfil y del ángulo de ataque; q la presión aerodinámica ($1/2 \rho v^2$ siendo ρ la densidad y v la velocidad del viento relativo) y S la superficie alar.

La resistencia total es pues la suma de dos tipos de resistencia:

- resistencia inducida
- resistencia parásita.

Resistencia inducida. La resistencia inducida, indeseada pero inevitable, es un producto de la sustentación, y se incrementa en proporción directa al incremento del ángulo de ataque. En la parte posterior del ala la corriente de aire que fluye por arriba se encuentra con la que fluye por debajo, la mayor velocidad de la primera deflecta hacia abajo a la segunda haciendo variar ligeramente el viento relativo, y este efecto crea una resistencia. Este efecto es más acusado en el extremo del ala, pues el aire que fluye por debajo encuentra una vía de escape hacia arriba donde hay menor presión, pero la mayor velocidad del aire fluyendo por arriba deflecta esa corriente hacia abajo produciéndose resistencia adicional. Este movimiento de remolino crea vórtices que absorben energía del avión.

Representadas de forma gráfica la sustentación y la resistencia, la fuerza aerodinámica se descompone en dos fuerzas: una aprovechable de sustentación y otra no deseada pero inevitable de resistencia (Fig.4.9).

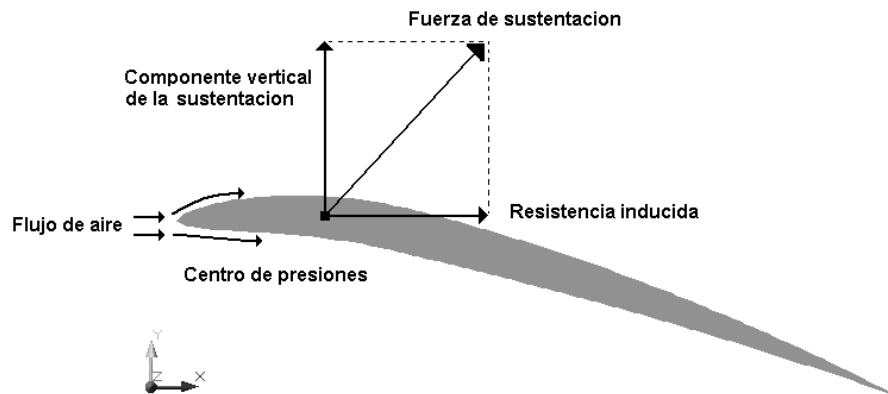


Fig. 4.9- Resistencia inducida.

De la explicación dada se deduce claramente que la resistencia inducida aumenta a medida que aumenta el ángulo de ataque. Pero si para mantener la misma sustentación ponemos más velocidad y menos ángulo de ataque, la resistencia inducida será menor, de lo cual deducimos que la resistencia inducida disminuye con el aumento de velocidad.

Las figuras 4.10 y 4.11 muestran la relación entre la Resistencia Vs. Velocidad y la Sustentación Vs. Ángulo de ataque

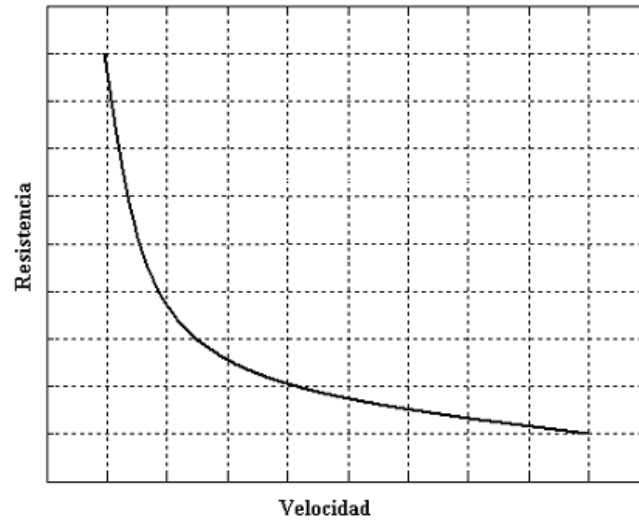


Fig. 4.10- Variación de la resistencia con la velocidad.

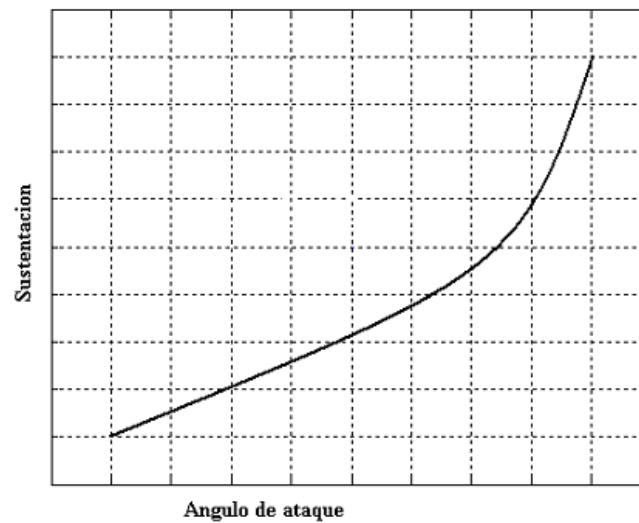


Fig. 4.11- Variación de la sustentación con el ángulo de ataque.

En la resistencia inducida también tiene influencia la forma de las alas; un ala alargada y estrecha tiene menos resistencia inducida que un ala corta y ancha.

Resistencia parásita. Es la producida por las demás resistencias no relacionadas con la sustentación, como son: resistencia al avance de las partes del avión que sobresalen (fuselaje, tren de aterrizaje no retráctil, antenas de radio, etc.); entorpecimiento del flujo del aire en alas sucias por impacto de insectos o con formación de hielo; rozamiento o fricción superficial con el aire; interferencia del flujo de aire a lo largo del fuselaje con el flujo de las alas; el flujo de aire canalizado al compartimiento del motor para refrigerarlo. También, la superficie total del ala y la forma de esta afecta a la resistencia parásita; un ala más alargada presenta mayor superficie al viento, y por ello mayor resistencia parásita, que un ala más corta. Lógicamente, cuanto mayor sea la velocidad mayor será el efecto de la resistencia parásita: la resistencia parásita aumenta con la velocidad.

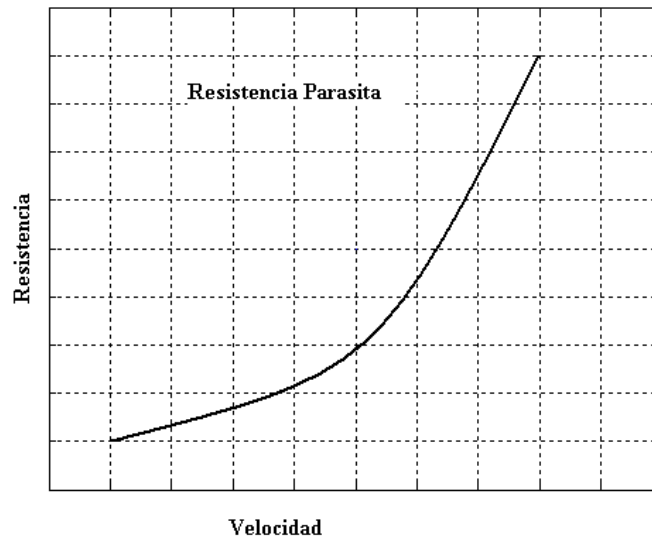


Fig. 4.12- Resistencia parásita vs. Velocidad.

Si la resistencia inducida es un producto de la sustentación, y en la resistencia parásita tienen influencia la superficie alar y la forma del ala, es obvio que prácticamente todos los factores que afectan a la sustentación afectan en mayor o menor medida a la resistencia. La resistencia inducida depende del ángulo de ataque. Por lo tanto se puede reducir la resistencia inducida, si para lograr más sustentación se incrementa la velocidad en vez de incrementar el ángulo de ataque. A mayor velocidad menor resistencia inducida. (Fig.4.10 Fig. 4.11) El peso influye de forma indirecta en esta resistencia, puesto que a más peso más sustentación se necesita y por tanto mayor ángulo de ataque para mantener la misma velocidad. Disminuyendo el peso disminuye la resistencia inducida.

Por el contrario, la resistencia parásita se incrementa con la velocidad del avión (Fig.4.12). La única forma que tiene el piloto para disminuirla es aminorar la velocidad, porque en lo demás, esta resistencia depende sobre todo del diseño del avión y el piloto no dispone apenas de capacidad de acción para modificarla. Si con el aumento de velocidad disminuye la resistencia inducida y se incrementa la resistencia parásita, tiene que haber un punto en que la suma de ambas (resistencia total) sea el menor posible. Este punto de velocidad viene tabulado por el fabricante en el manual del avión.

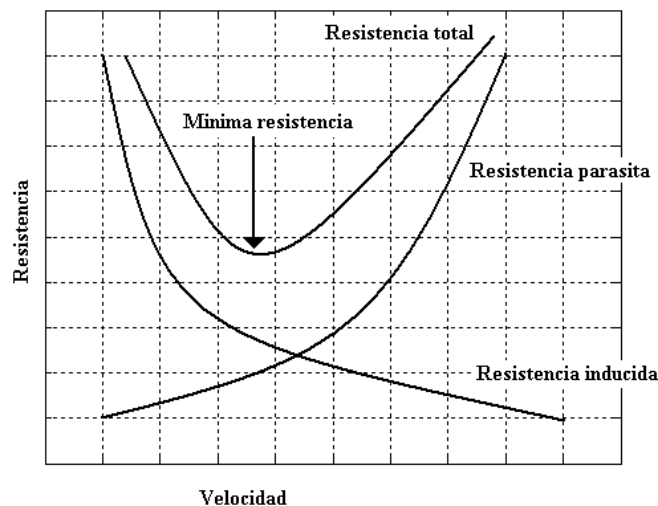


Fig. 4.13: Resistencia total.

A baja velocidad la mayoría de la resistencia es inducida, debido al incremento del ángulo de ataque para producir suficiente sustentación para soportar el peso del avión. A medida que la velocidad sigue bajando, la resistencia inducida se incrementa rápidamente y la resistencia parásita apenas tiene influencia. Por el contrario, a alta velocidad la resistencia parásita es la dominante mientras que la inducida es irrelevante.

Resumiendo:

- A mayor velocidad menor resistencia inducida.
- A mayor ángulo de ataque mayor resistencia inducida.
- A mayor velocidad mayor resistencia parásita.

CAPITULO V

V- GENERACIÓN DE MALLAS

5.1- Introducción

Sistemas físicos continuos, tales como el flujo de aire alrededor de un avión, la concentración de esfuerzos en una presa o el campo eléctrico en un circuito integrado, son generalmente modelados usando ecuaciones diferenciales parciales. Para realizar simulaciones de estos sistemas en una computadora, las ecuaciones necesitan ser discretizadas sobre un número finito de puntos en el espacio y en el tiempo donde variables como velocidad, densidad, campo eléctrico, entre otras, serán calculadas.

Los métodos usuales de discretización, diferencias finitas, volúmenes finitos y elementos finitos, utilizan puntos vecinos para calcular derivadas y de esta manera se tiene el concepto de malla sobre la cual los cálculos se realizan.

Existen principalmente dos tipos de mallas que pueden caracterizarse por la forma en que los nodos están conectados. En las secciones que siguen se discutirán en forma rápida los principales tipos de mallas que se conocen y la forma en que éstas son generadas, principalmente se analizará la triangulación de Delaunay.

5.2- Concepto De Malla

Una malla es una representación discreta de un dominio geométrico en formas menores y mas simples, como triángulos o cuadriláteros en dos dimensiones, y tetraedros y hexaedros en tres dimensiones.

5.3- Tipos De Mallas

Existen principalmente dos tipos de mallas:

A-Malla Estructurada.

B-Malla No – Estructurada.

5.3.1- Malla estructurada

Es aquella malla en la cual el volumen elemental esta conectado con el mismo número de elementos vecinos. Dentro de esta clasificación tenemos:

- a- Malla Estructurada Uniforme.
- b- Malla Estructurada No - Uniforme.

En las Figuras 5.1 y 5.2. se pueden observar este tipo de Mallas

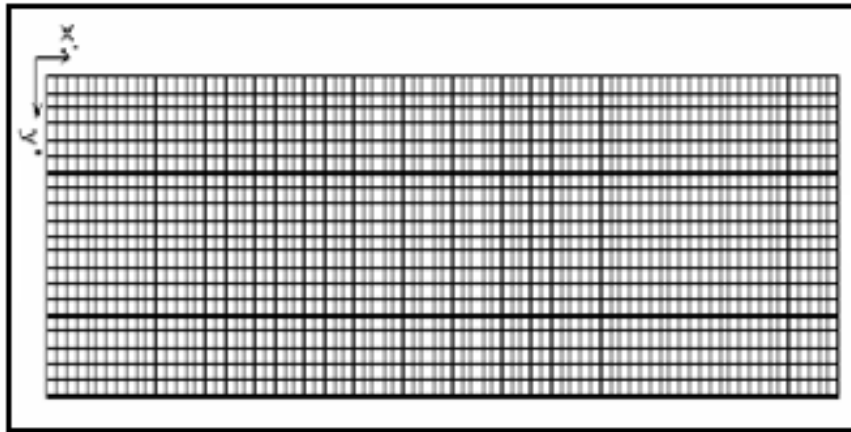


Fig. 5.1- Malla estructurada uniforme.

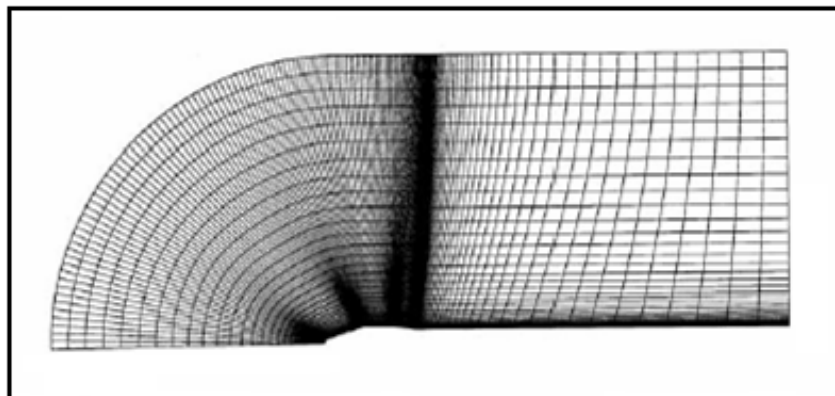


Fig. 5.2- Malla estructurada no uniforme.

5.3.2- Malla no – estructurada

Una malla no – estructurada es aquella malla en la cual sus vértices pueden presentar vecinos locales arbitrariamente variados.

En la figura siguiente se puede observar un ejemplo de malla no estructurada.

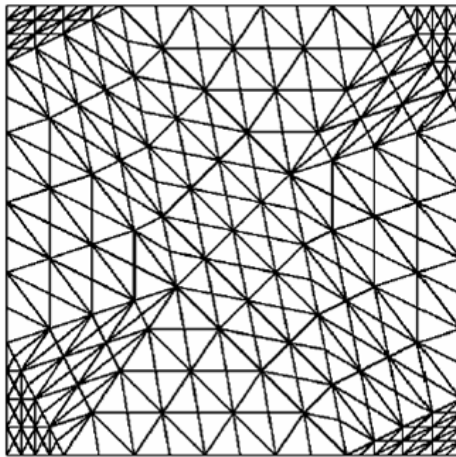


Fig. 5.3- Malla no – estructurada.

5.4- Aplicaciones

Las mallas tienen aplicación en una infinidad de áreas. Ellas son bastante utilizadas en el modelaje de superficies (topografía, geografía) y de volúmenes (geología, geofísica), teniendo como fin principalmente la obtención de representaciones mas compactas.

En computación gráfica, en muchas escenas los objetos son reducidos a mallas antes de ser diseñados para optimización. En simulaciones de procesos físicos de tensiones o flujo de calor las mallas son esenciales para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Las figuras 5.4 a 5.7 ilustran algunas de las aplicaciones citadas.

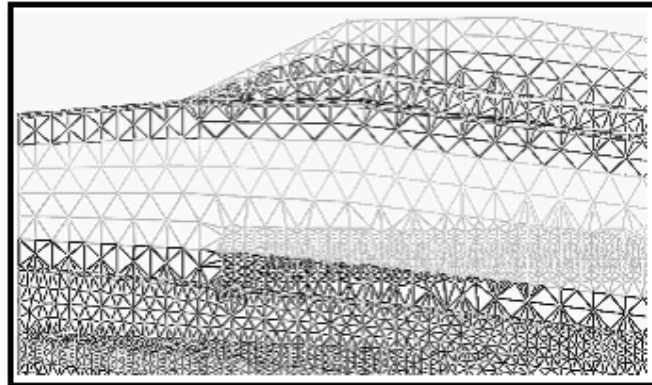


Fig. 5.4- Utilización de mallas para modelamiento topográfico.

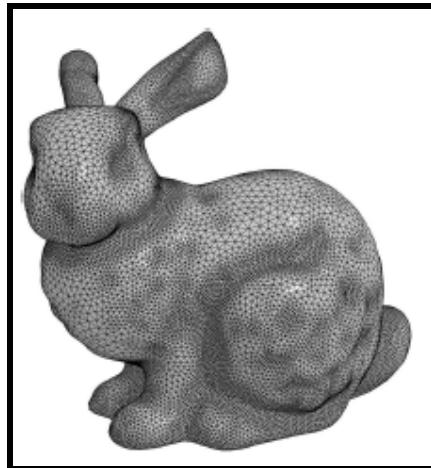


Fig. 5.5- Utilización de mallas en computación gráfica.

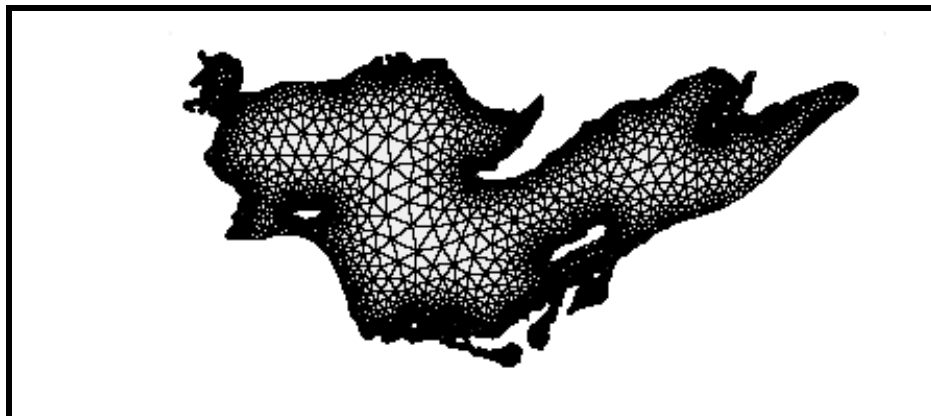


Fig. 5.6- Utilización de mallas para modelamiento geológico.

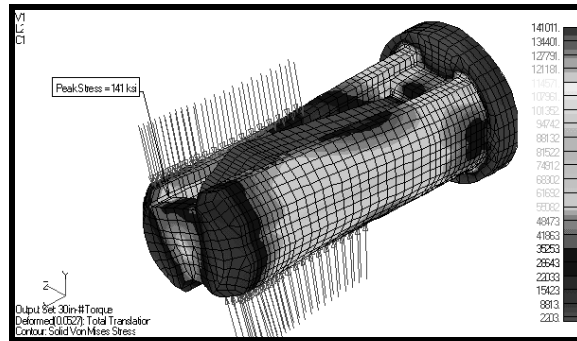


Fig. 5.7- Utilización de mallas para modelamiento estructural.

5.5- Triangulación De Delaunay

La triangulación de Delaunay consiste en, dada una nube de puntos en el plano, hallar una triangulación en la que los puntos más próximos entre sí estén conectados por una arista, o dicho de otra forma, en la que los triángulos resultantes sean lo más regulares posibles.

5.5.1- Caracterización de la triangulación de Delaunay

Sea $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos en el plano, una Triangulación de Delaunay de P cumplirá las siguientes propiedades:

- Tres puntos p_i , p_j y p_k pertenecientes a P son vértices de la misma cara de la Triangulación de Delaunay de P , si y solamente si, el círculo que pasa por los puntos p_i , p_j y p_k no contiene puntos de P en su interior. Podemos observarlo en la figura 5.8.
- Dos puntos p_i y p_j pertenecientes a P forman un lado de la Triangulación de Delaunay de P , si y solamente si, existe un círculo que contiene a p_i y p_j en su circunferencia y no contiene en su interior ningún punto de P . De igual manera podemos observarlo en la figura 5.9

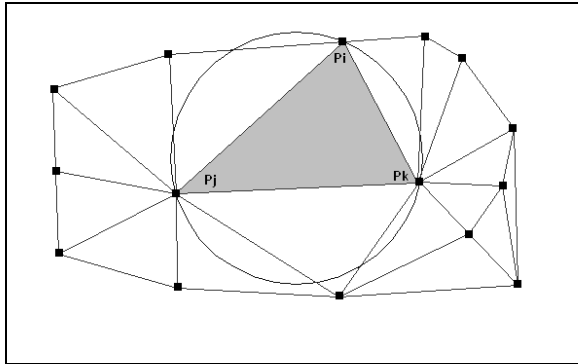


Fig. 5.8- Puntos pertenecientes al conjunto de puntos P.

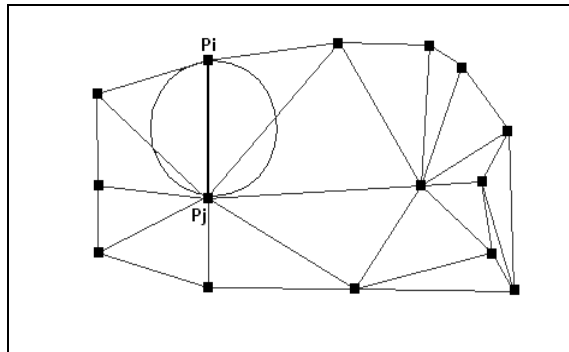


Fig. 5.9- Puntos pertenecientes a P.

Con estas dos propiedades podemos caracterizar la Triangulación de Delaunay de la siguiente manera:

Sea P un conjunto de puntos en el plano y T una triangulación de P . T es una Triangulación de Delaunay de P , si y solamente si, la circunferencia circunscrita de cualquier triángulo de T no contiene puntos de P .

Veamos gráficamente lo que denominaremos como arista ilegal:

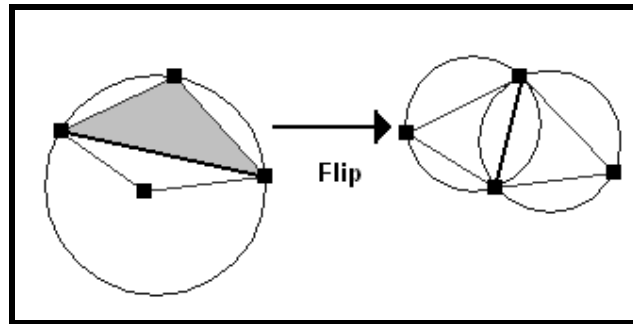


Fig. 5.10- Intercambio de aristas

Se puede observar, que en la figura 5.10, la circunferencia circunscrita al triángulo sombreado contiene a otro punto en su interior, la arista que pertenece a los dos triángulos (línea más gruesa) es una arista ilegal. Realizando un intercambio de aristas o flip se consigue una triangulación válida, tal y como se observa en el dibujo de la derecha. Hemos convertido una arista ilegal en legal. Se puede generalizar y afirmar que una triangulación T de un conjunto P de puntos en el plano es una Triangulación de Delaunay, si y solamente si, todas las aristas son legales.

5.5.2- Algoritmo Delaunay

Con las afirmaciones anteriores presentamos el siguiente algoritmo para el cálculo de la Triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos en el plano:

Partimos de un triángulo $p_1 p_2 p_3$, suficientemente grande, que contenga toda la nube de puntos. La idea es computar la Triangulación de Delaunay de la nube de puntos sin que el triángulo externo $p_1 p_2 p_3$ afecte a la misma.

Finalmente descartaremos las aristas que parten de p_1 , p_2 ó p_3

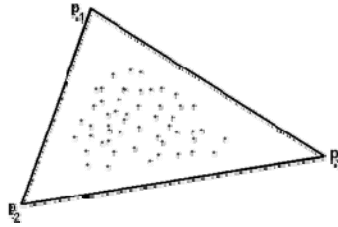


Fig. 5.11- Nube de puntos contenida en el triángulo $P_1P_2P_3$

Veamos el algoritmo:

Triangulacion_Delaunay (P)

Entrada: Un conjunto P de puntos en el plano.

Salida: La Triangulación de Delaunay de P .

1. Sean p_1 , p_2 y p_3 tres puntos tales que P está contenido en el triángulo que forman.
2. Inicializamos T como una triangulación de un único triángulo $p_1 p_2 p_3$
3. Realizar una permutación cualquiera p_1, p_2, \dots, p_n de P
4. for $r:=1$ to n
5. hacer (Insertar p_r en T)
6. Encontrar un triángulo $p_i p_j p_k$ de T que contenga a p_r
7. si p_r cae en el interior del triángulo $p_i p_j p_k$
8. entonces
- Añadir aristas desde p_r a los tres vértices de $p_i p_j p_k$, dividiendo este triángulo en tres
9. LEGALIZA_LADO ($p_r, p_i p_j, T$)
10. LEGALIZA_LADO ($p_r, p_j p_k, T$)
11. LEGALIZA_LADO ($p_r, p_k p_i, T$)

12. en caso contrario (p_r cae en uno de los lados del triángulo $p_i p_j p_k$, por ejemplo el lado $p_i p_j$)
13. Añadir aristas desde p_r a p_k y al tercer vértice p_l del otro triángulo que comparte la arista $p_i p_j$, de esta forma dividimos los dos triángulos que comparten la arista $p_i p_j$ en cuatro triángulos.
14. LEGALIZA_LADO ($p_r, p_i p_l, T$)
15. LEGALIZA_LADO ($p_r, p_l p_j, T$)
16. LEGALIZA_LADO ($p_r, p_j p_k, T$)
17. LEGALIZA_LADO ($p_r, p_k p_i, T$)
18. Descartar p_{-1} , p_{-2} y p_{-3} y todas las aristas que parten de ellos de T
19. devuelve T

Veamos el algoritmo con más detalle:

En el punto 6. se nos pide que encontremos el triángulo que contiene a ese punto, éste es un típico problema de localización de punto tratado en numerosa bibliografía.

En el punto 7. (el punto está en el interior del triángulo) nos encontramos en la situación que se presenta en el siguiente gráfico:

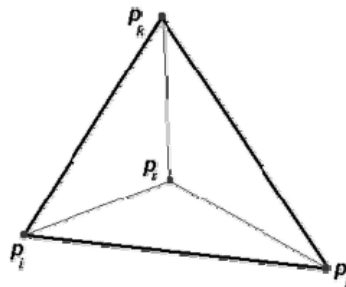


Fig. 5.12- p_r localizado en el interior del triángulo $p_i p_j p_k$

Vemos como conectamos el vértice insertado con los vértices del triángulo, partiendo de esta forma el triángulo original en tres. En el punto 12. en cambio, el punto cae justamente en medio de una arista compartida por dos triángulos, en este caso dividimos los dos triángulos iniciales en cuatro, tal y como muestra el gráfico siguiente:

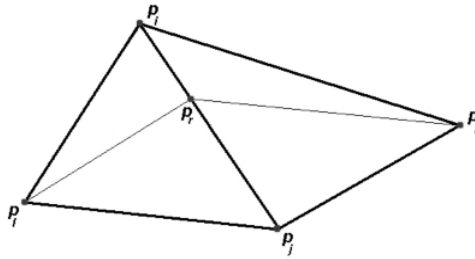


Fig. 5.13- P_r localizado en uno de los lados del triángulo $P_i P_j P_k$

En ambos casos hemos generado nuevos triángulos y no tenemos la garantía de que las aristas externas sean aristas legales, por eso, desde el punto 9. al 11. y desde el 14. al 17. del algoritmo se realiza la legalización de los lados más externos, realizando flips, si es necesario (procedimiento LEGALIZA_LADO).

Veamos ahora el procedimiento LEGALIZA_LADO:

LEGALIZA_LADO (pr , pi pj , T)

1. (El punto que se está insertando es pr , y pi pj es la arista de T a la que puede ser necesario hacer un flip)
2. si pi pj es ilegal
3. Entonces
 - Sea pi pj pk el triángulo adyacente a pr pi pj compartiendo la arista pi pj
- 4.(Flip pi pj) Reemplazar pi pj por pr pk
- 5.LEGALIZA_LADO(pr , pi pk , T)
6. LEGALIZA_LADO (pr , pk pj , T)

Es decir comprueba que la legalidad de la arista, si es ilegal hace el flip correspondiente y chequea de nuevo la legalidad de los nuevos lados.

Anteriormente ya comentamos cuando un lado es ilegal, pero por la construcción del algoritmo, existen tres puntos (los del triángulo externo) que insertamos al comienzo y no deben afectar a la triangulación de la nube de puntos, por esto hay que realizar una modificación al test de comprobación de la legalidad de la arista cuando uno de los puntos del triángulo externo está implicado. Veamos esta modificación.

Partimos de la nube inicial de puntos $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ a la que le añadimos los puntos que forman el triángulo externo que contiene a P , es decir, p_{-1} , p_{-2} y p_{-3} . Queremos comprobar si la arista $p_i p_j$ es o no ilegal. Surgen varias posibilidades:

- **i y j son negativos.**

En este caso decidimos que la arista $p_i p_j$ es legal, ya que tenemos que preservar las aristas del triángulo externo $p_{-1} p_{-2} p_{-3}$.

Para el resto de los casos asumimos que p_k y p_l son los otros dos vértices de los triángulos que comparten la arista $p_i p_j$.

- **i, j, k, l son todos positivos.**

Este es el caso normal comentado anteriormente, la arista $p_i p_j$ es ilegal, si y solamente si, p_l cae dentro del círculo definido por $p_i p_j$ y p_k

- **Solamente uno de los índices i, j, k, l es negativo.**

No queremos que este punto especial destruya alguna arista de Delaunay entre puntos de P . Para ello, si i o j son negativos (p_i o p_j son puntos del triángulo externo), decidimos que la arista $p_i p_j$ es ilegal y será reemplazada por la arista $p_k p_l$, en caso contrario la arista $p_i p_j$ es legal.

- **Dos de los índices i, j, k, l son negativos.**

En este caso uno de los índices i, j y otro de los índices k, l deben ser negativos; no podemos tener k y l negativos y si i y j lo fueran estaríamos en el primer caso. Si el índice negativo de i, j es menor que el índice negativo de k, l entonces decidimos que la arista $p_i p_j$ es legal, en caso contrario, ilegal.

- **Tres de los índices i, j, k, l son negativos.**

Este caso nunca puede ocurrir: si i y j son negativos estaríamos en el primer caso, además k y l no pueden ser ambos negativos ya que uno de los dos debe ser el punto p_r que acabamos de insertar. Como hemos visto, este algoritmo, no es directamente incremental, ya que se parte de un conjunto de puntos inicial

5.6- Triangulación De Un Polígono Convexo

Para mallar un polígono convexo se tiene que tener presente ciertos requerimientos, entre los más principales podemos citar los siguientes:

- La malla debe ser válida, es decir, sin agujeros, no se debe intersectar ella misma, etc. Aunque éste es un requerimiento obvio, muchos esquemas de generación de mallas requieren una enorme verificación de estas condiciones.

- La densidad de la malla debe ser controlable para permitir un equilibrio entre la exactitud de la solución y los cálculos en el tiempo.

- La densidad de la malla debe variar dependiendo de la exactitud deseada en cada lugar del dominio y esta variación deberá ser suave para reducir errores numéricos.

- En general, los ángulos interiores de los elementos de la malla, deben ser aproximadamente iguales (triángulos equiláteros). Elementos altamente distorsionados (triángulos delgados por ejemplo) pueden ocasionar problemas de estabilidad numérica causados por errores de redondeo.

- La malla debe acoplarse con la frontera del dominio, la cual también es una condición obvia pero algunos métodos (por ejemplo triangulación de Delaunay) no satisfacen esto y es necesario verificar y corregir las aristas o caras que crucen la frontera. El algoritmo que se presenta a continuación cumple con esta condición.

5.6.1- Algoritmo Coercitum

En el capítulo anterior se explicó detalladamente el algoritmo Delaunay este algoritmo como se sabe triangula una nube de puntos. El algoritmo de Delaunay no garantiza que la malla se acople con la frontera del dominio, para que esto suceda se tuvo que diseñar el algoritmo Coercitum, este algoritmo creado esta compuesto de 7 pasos los cuales se muestran a continuación:

1-Se grafica la figura que será mallada.

2-Se da una primera aproximación a la malla, es decir se crea una malla estructurada uniforme que contenga la figura.

3-Se refina la malla que contiene al polígono

Estos tres primeros pasos se muestran en las figuras 5.14, 5.15 y 5.16.

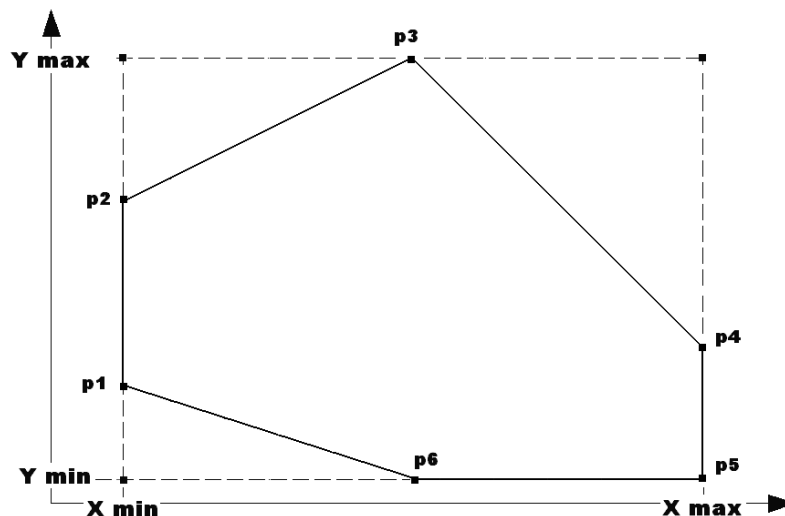


Fig. 5.14- Polígono convexo.

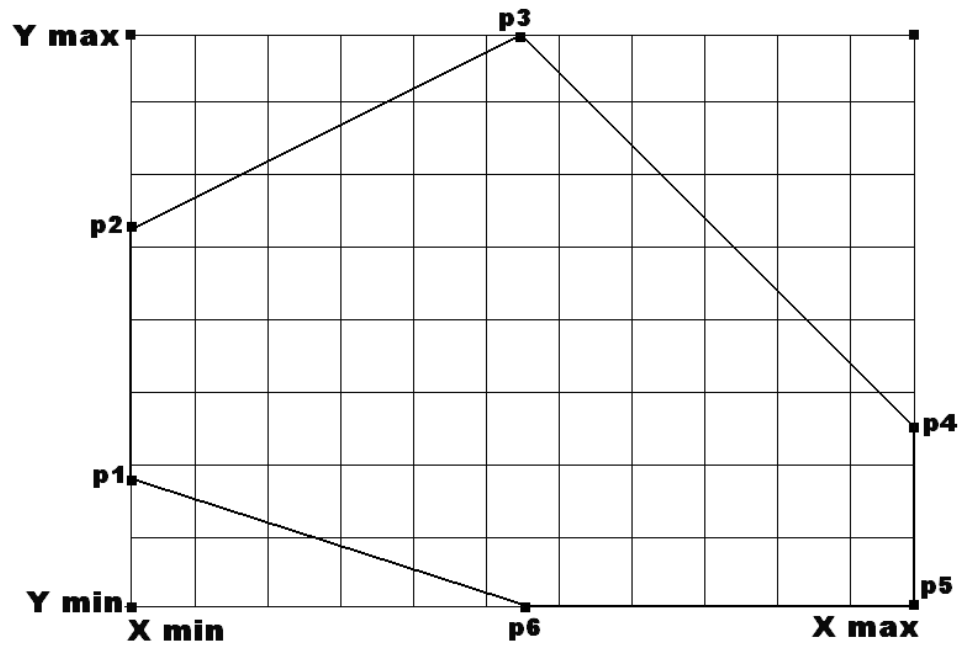


Fig. 5.15- Malla preliminar que contiene al polígono convexo.

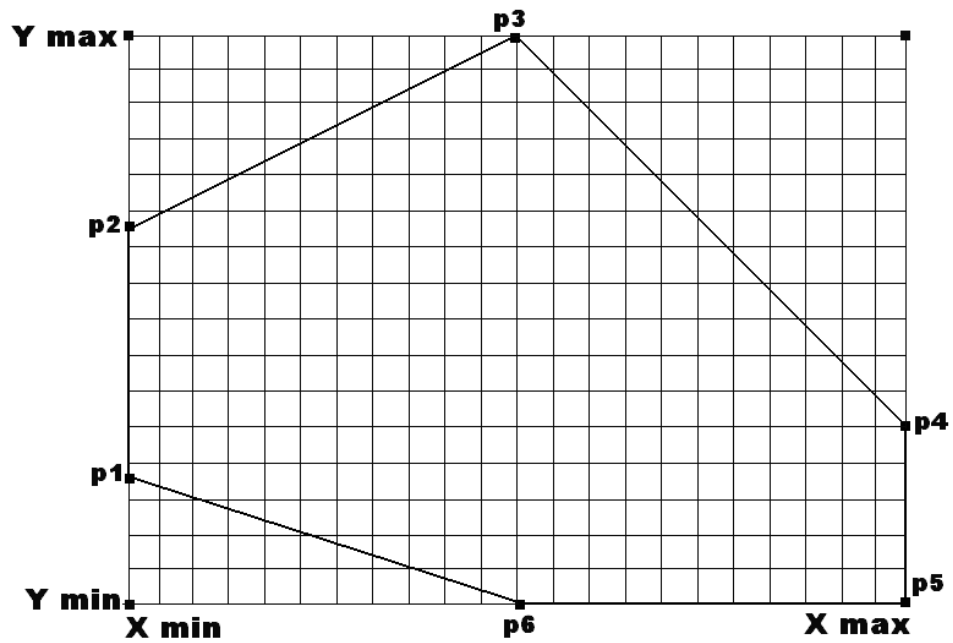


Fig. 5.16- Malla refinada.

4- Se generan los puntos del contorno de la malla.

4.1- Creación del vector Norte

$$\mathbf{N}=(N_x, N_y)=(i, LY) / i=0,1, \dots, LX$$

4.2- Creación del vector Sur

$$\mathbf{S}=(S_x, S_y)=(i, 0) / i=0,1, \dots, LX$$

4.3- Creación del vector Este

$$\mathbf{E}=(E_x, E_y)=(LX, j) / j=0,1, \dots, LY$$

4.4- Creación del vector Oeste

$$\mathbf{W}=(W_x, W_y)=(0, j) / j=0,1, \dots, LY$$

La generación de estos puntos se pueden observar en las figuras
(5.17, 5.18, 5.19, 5.20 Y 5.21)

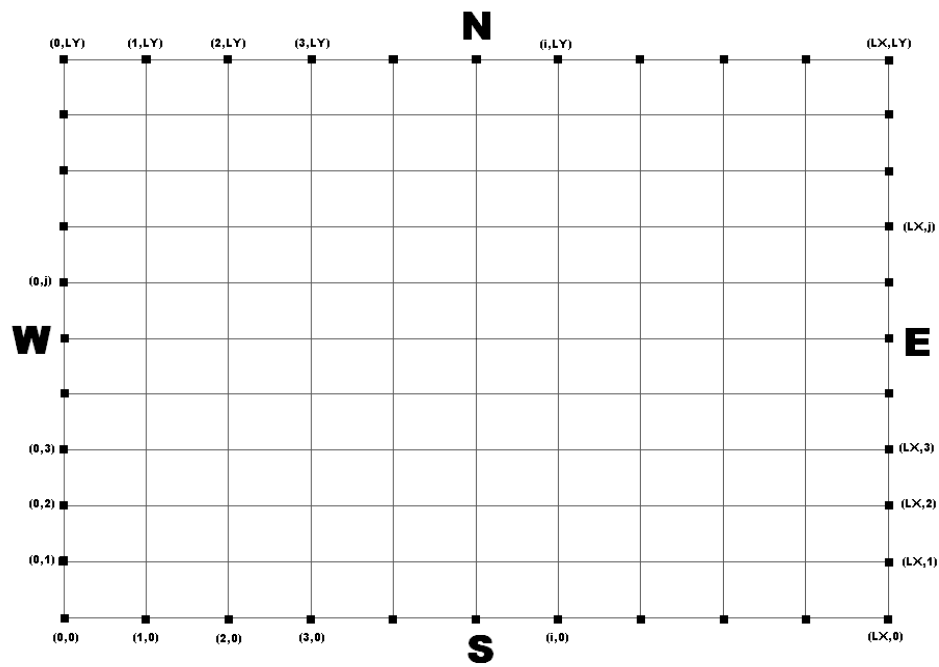


Fig. 5.17-Puntos del contorno de la malla.

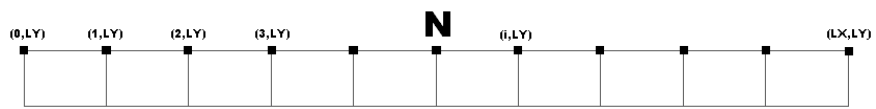


Fig. 5.18- Vector Norte.

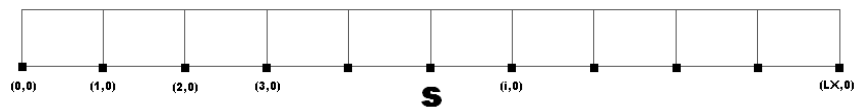


Fig. 5.19: Vector Sur.

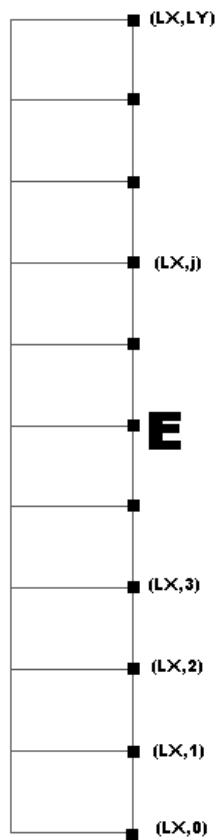


Fig. 5.20- Vector Este.

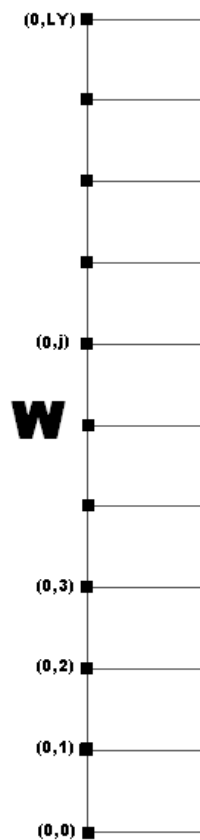


Fig. 5.21- Vector Oeste.

5-Creación de la matriz columna interna. Para la creación de la matriz interna se procederá en dos partes la primera para el eje de las abscisas y la segunda para las ordenadas.

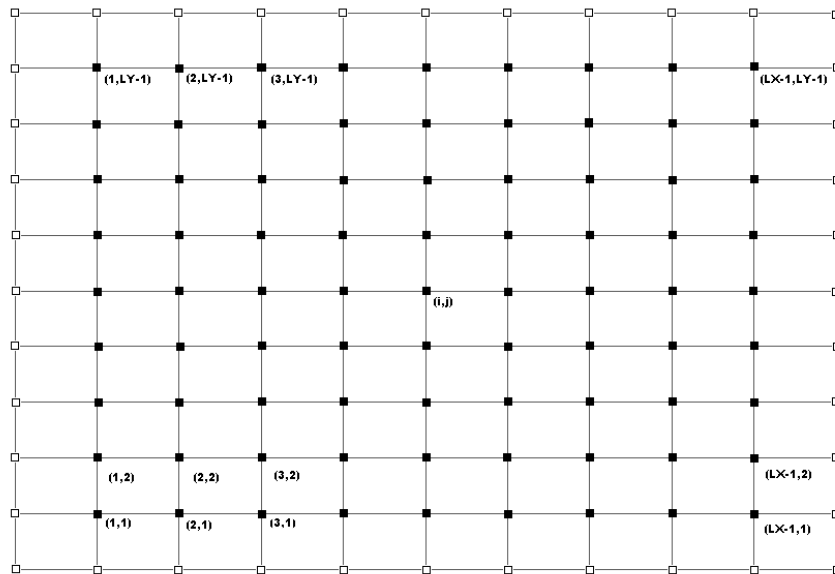


Fig. 5.22- Matriz interna.

5.1-Generación de las abscisas.

MAT X(j) = i

i = 1 : (LX-1)

j = i : (LX-1) : (LY-1)(LX-1)

Por ejemplo para i=1 se obtienen los siguientes valores:

i = 1

j = 1, LX, 2LX-1, 3LX-2.....

$$\begin{array}{l}
 \text{MATX}(1) \quad = 1 \\
 \text{MATX}(1\text{LX}-0) \quad = 1 \\
 \text{MATX}(2\text{LX}-1) \quad = 1 \\
 \text{MATX}(3\text{LX}-2) \quad = 1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \text{MATX}((n)\text{LX}-(n-1)) \quad = 1
 \end{array}$$

De la misma forma se continua hasta que i adopta el valor de $\text{LX}-1$.

Para $i = \text{LX}-1$

$j = \text{LX}-1, 2\text{LX}-2, 3\text{LX}-3, 4\text{LX}-4 \dots\dots\dots$

$$\begin{array}{l}
 \text{MATX}(1\text{LX}-1) = \text{LX}-1 \\
 \text{MATX}(2\text{LX}-2) = \text{LX}-1 \\
 \text{MATX}(3\text{LX}-3) = \text{LX}-1 \\
 \text{MATX}(4\text{LX}-4) = \text{LX}-1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \text{MATX}((n+1)\text{LX}-(n+1)) = \text{LX}-1
 \end{array}$$

Las figuras (5.23, 5.24, 5.25) y las figuras (5.26, 5.27, 5.28) representan de forma gráfica como se almacena los valores para las abscisas y las ordenadas respectivamente.

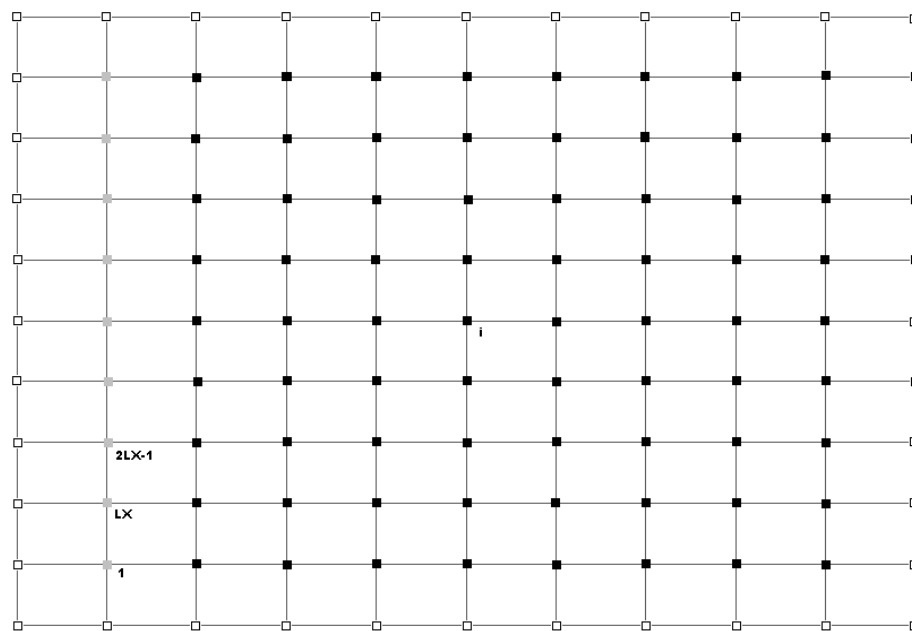


Fig. 5.23- Generación de la primera columna.

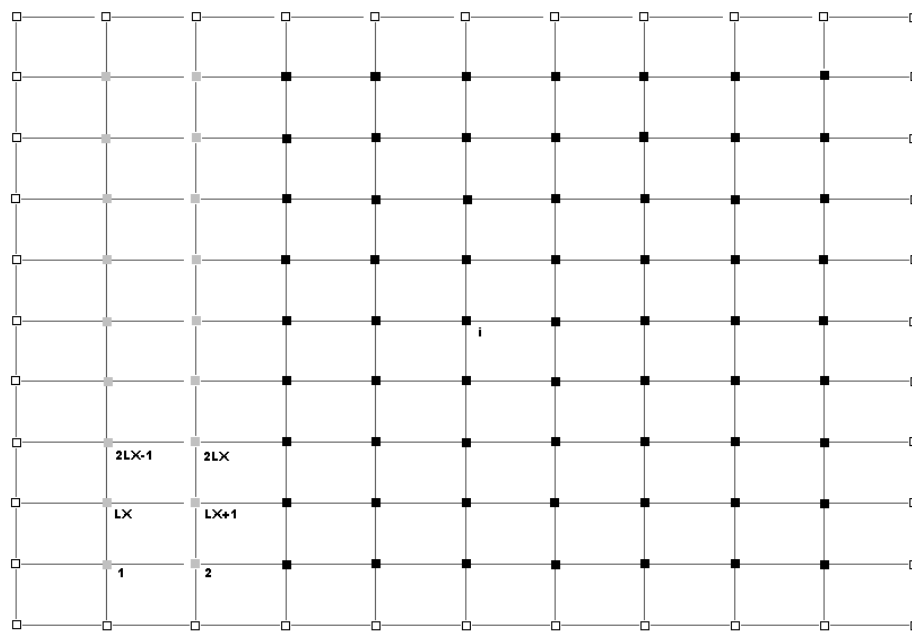


Fig. 5.24- Generación de la segunda columna.

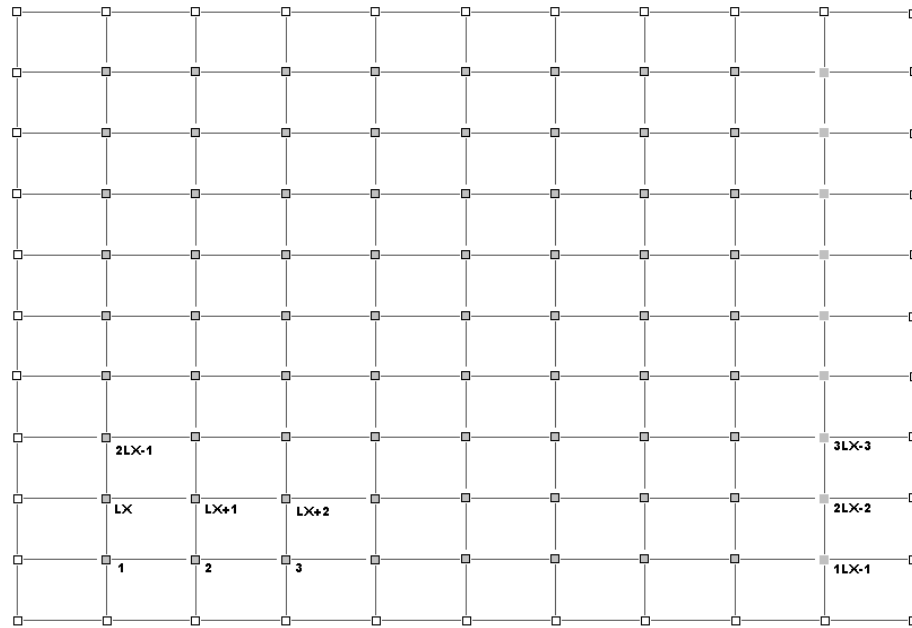


Fig. 5.25- Generación de la enésima columna.

5.2-Generación de las ordenadas

MAT Y(j) = i

i = 1 : (LY-1)

j = (LX-1) (i-1)+1 : (LX-1) (i)

Por ejemplo para i=1 se obtienen los siguientes valores:

i = 1

j = 1, 2, 3, 4.....

$$\begin{array}{l}
 \text{MATX}(1) = 1 \\
 \text{MATX}(2) = 1 \\
 \text{MATX}(3) = 1 \\
 \text{MATX}(4) = 1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \text{MATX}(m) = 1
 \end{array}$$

De la misma forma se continua hasta que i adopta el valor de $LY-1$.

$$i = (LY-1)$$

$$j = (LX-1)LY+1, (LX-1)LY+2, (LX-1)LY+3, \dots$$

$$\begin{array}{l}
 \text{MATX}((LX-1)LY+1) = LY-1 \\
 \text{MATX}((LX-1)LY+2) = LY-1 \\
 \text{MATX}((LX-1)LY+3) = LY-1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \text{MATX}((LX-1)LY+m) = LY-1
 \end{array}$$

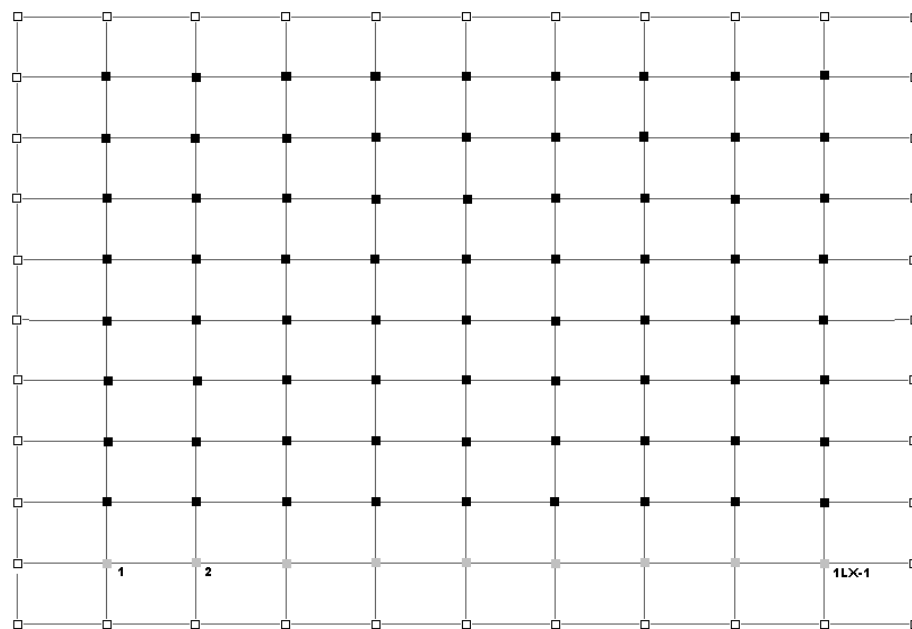


Fig. 5.26- Generación de la primera fila.

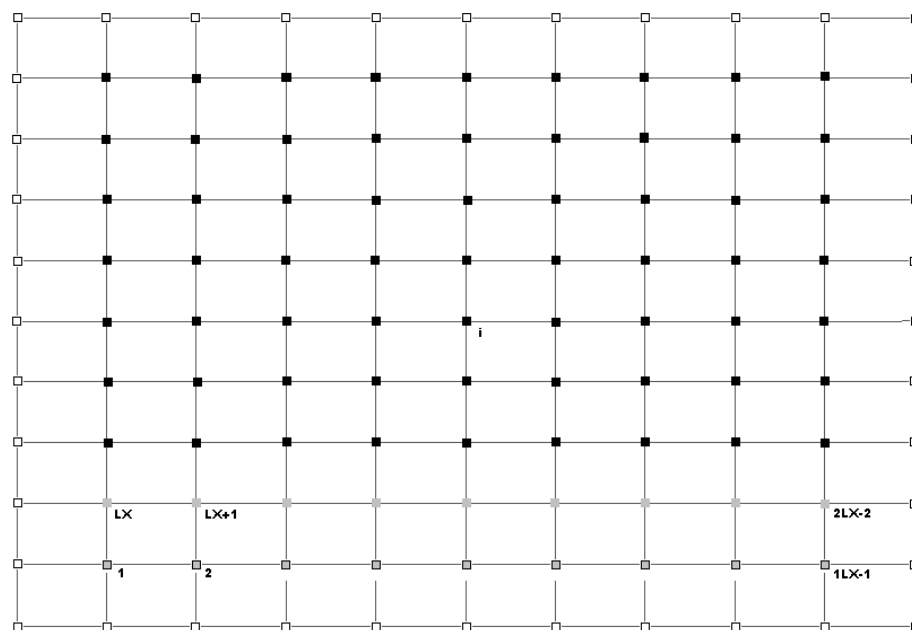


Fig. 5.27- Generación de la segunda fila.

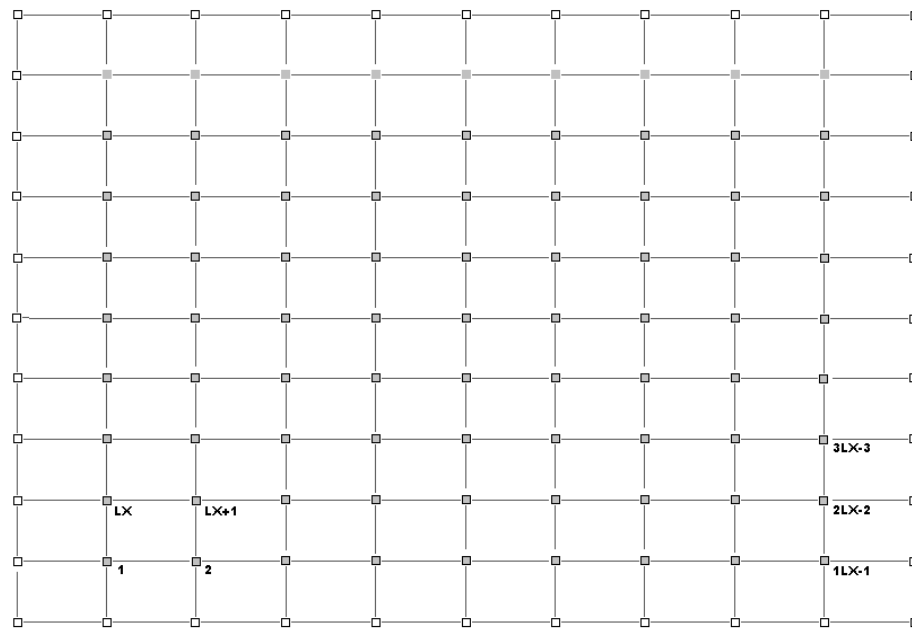


Fig. 5.28- Generación de la enésima fila.

6-Una vez obtenido los diferentes vectores en los cuales están almacenados todos los valores de las abscisas y de las ordenadas se procede a juntarlos en dos grupos un vector que almacena todos los valores de las abscisas y otro vector que almacena todos los valores de las ordenadas.

7-Obtenida la malla que contiene la figura se procede a determinar cuales de los puntos están “dentro” o “fuera” de la figura.

5.6.2-Punto en el polígono

Uno de los problemas más importantes en Geometría Computacional consiste en determinar si un punto esta dentro o fuera de un polígono. Entonces para determinar si un punto Q , está o no dentro de un Polígono P , consiste en trazar, a partir de Q , una semirrecta en una dirección cualquiera.

Si el número de intersecciones es impar, el punto está dentro del polígono P. Si el número de intersecciones es par, el punto está fuera del polígono P.

Las figuras 5.29 y 5.30 representan la condición de si un punto está dentro o fuera, las figuras 5.31, 5.32, 5.33 y 5.34 representan los casos “especiales”.

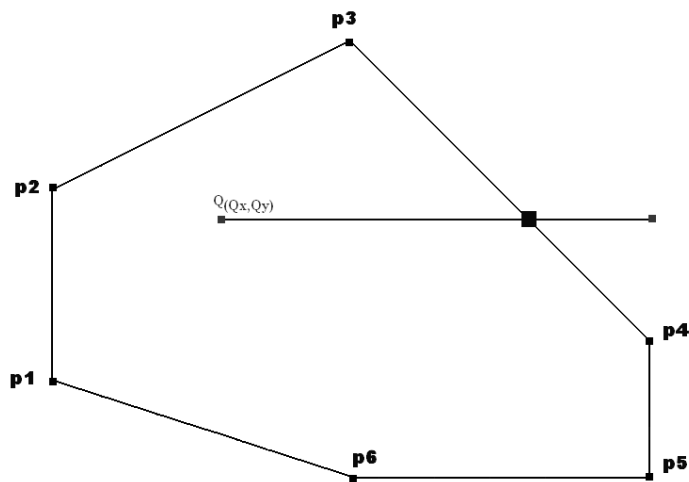


Fig. 5.29- Punto interno, número de intersecciones impar.

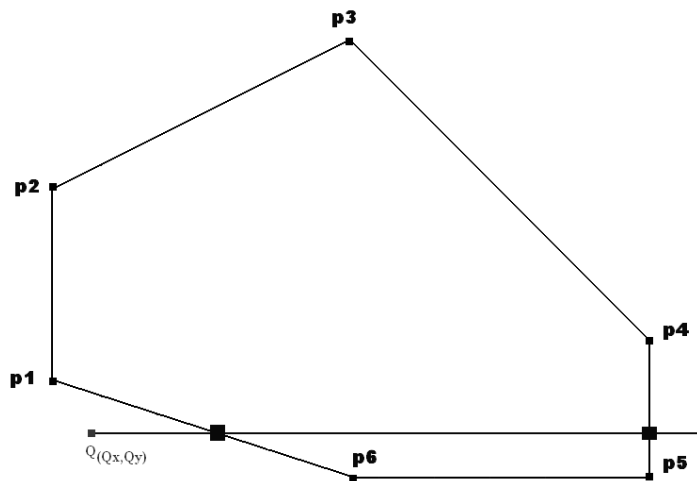


Fig. 5.30- Punto externo, número de intersecciones par.

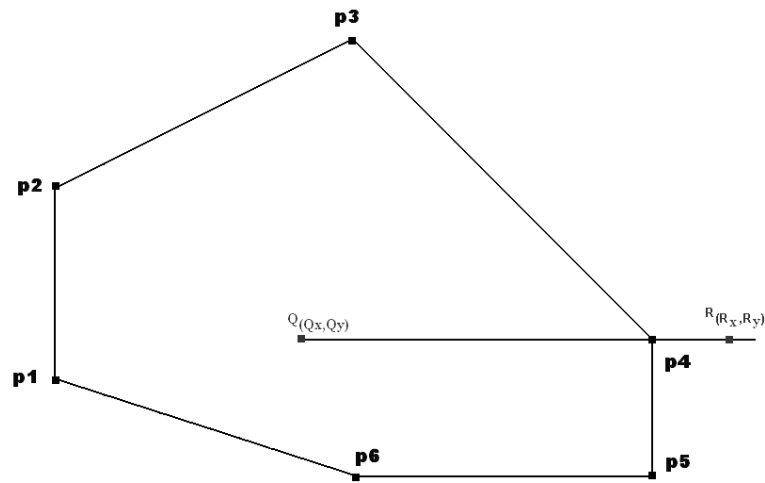


Fig. 5.31- Semirecta \overline{QR} por el v3rtice del pol3gono.

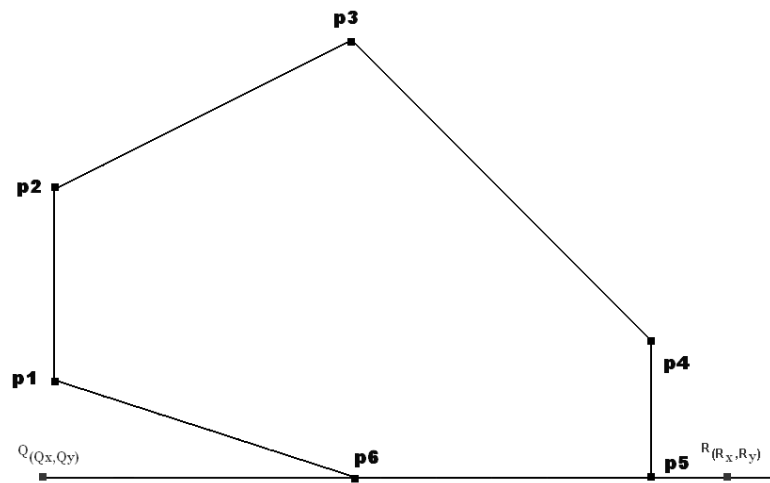


Fig. 5.32- Semirecta \overline{QR} por uno de los lados del pol3gono.

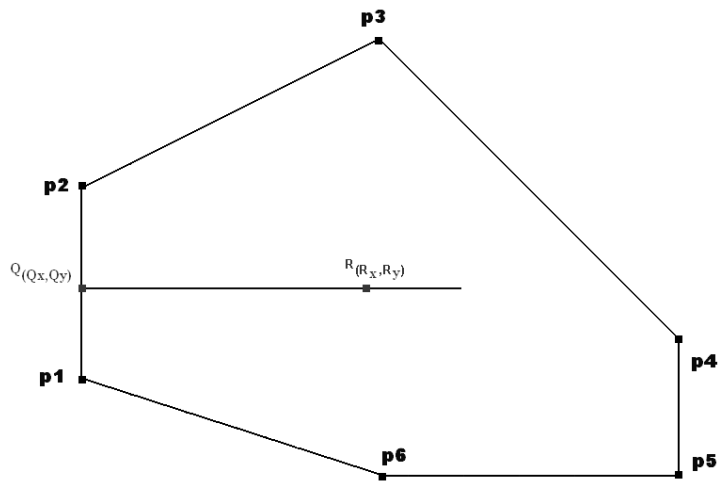


Fig. 5.33- Punto en uno de los lados del polígono.

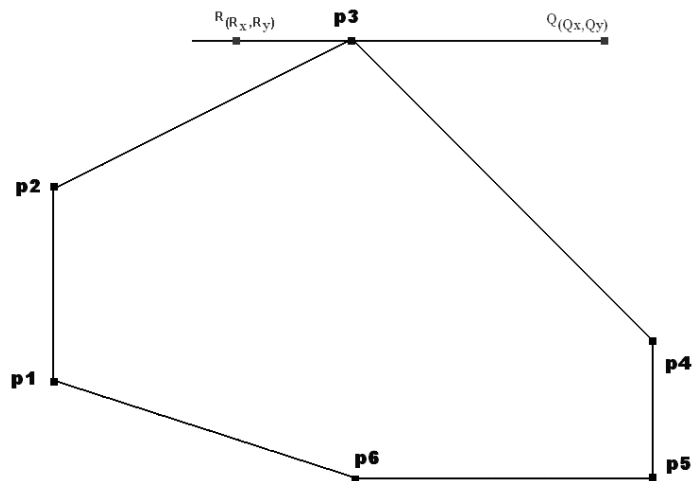


Fig. 5.34- Semirecta \overrightarrow{QR} por el vértice del polígono.

Para determinar si un punto está o no dentro de un Polígono se traza, a partir del punto una semirecta en una dirección cualquiera y se determina si la cantidad de intersecciones es par o impar. Para este fin necesitamos dar alguna condición, la condición se muestra a continuación:

Intersección de Segmentos

Verificar si los segmentos se interceptan consiste en comprobar si los puntos $p1$ y $p2$ están de lados opuestos del segmento formado por $p3p4$ y también si $p3$ y $p4$ están de lados opuestos del segmento formado por $p1p2$.

Dado dos segmentos formados por los puntos $p1p2$ y $p3p4$, respectivamente y con $p1=(X1,Y1)$, $p2=(X2,Y2)$, $p3=(X3,Y3)$ y $p4=(X4,Y4)$, el punto de intersección es:

$$p1 + u(p2 - p1) = p3 + v(p4 - p3)$$

$$\begin{cases} x1 + u(x2 - x1) = x3 + v(x4 - x3) \\ y1 + u(y2 - y1) = y3 + v(y4 - y3) \end{cases}$$

Desarrollando el sistema tenemos:

$$u = \frac{(x4 - x3)(y1 - y3) - (y4 - y3)(x1 - x3)}{(y4 - y3)(x2 - x1) - (x4 - x3)(y2 - y1)}$$

$$v = \frac{(x2 - x1)(y1 - y3) - (y2 - y1)(x1 - x3)}{(y4 - y3)(x2 - x1) - (x4 - x3)(y2 - y1)}$$

Calculados los parámetros u y v podemos determinar los puntos de intersección:

$$\begin{aligned} X_{\text{interseccion}} &= x1 + u(x2 - x1) \\ Y_{\text{interseccion}} &= y1 + u(y2 - y1) \end{aligned}$$

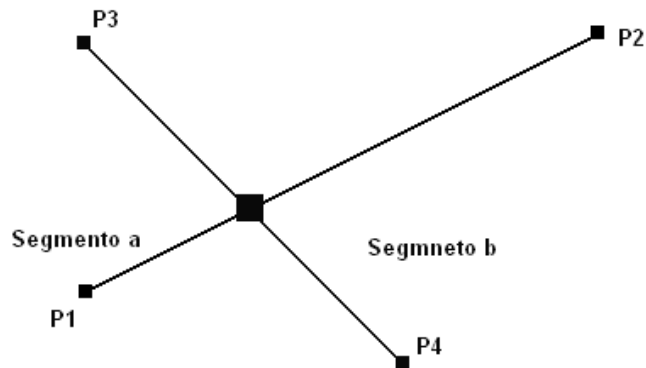


Fig. 5.35- Intersección de segmentos.

Entonces solo habrá intersección entre los dos segmentos en un punto localizado sobre ambos, lo que significa valores de u y v ambos en el intervalo $[0, 1]$

5.7- PHITA - 10X

5.7.1- Presentación del programa

PHITA - 10X es un programa diseñado en MATLAB 6.0, este programa sirve para generar mallas en dos dimensiones. La generación de la malla bidimensional es realizada mediante la triangulación de Delaunay.

5.7.2- Uso del programa

PHITA - 10X es un programa de fácil manejo, para poder utilizarlo en primer lugar se debe tener instalado MATLAB 6.0 o una versión superior si bien el programa **PHITA - 10X** se puede ejecutar en algunas versiones inferiores se recomienda utilizar versiones superiores a la versión 6.0 de Matlab.

Antes de ejecutar el programa **PHITA - 10X** se tiene que definir la geometría a mallas para tal fin se necesita ingresar los puntos que conforman la geometría a mallas, estos puntos son ingresados mediante un archivo de datos es decir archivos con las siguientes extensiones: *.dat, *.out, *.txt, etc.

Posteriormente este archivo es guardado en la carpeta de trabajo de este modo este archivo es reconocido por el programa **PHITA - 10X**. Luego se ejecuta el programa desde la ventana de comandos de Matlab.

5.7.3-Proceso

La secuencia de cómo el programa obtiene el mallado final es el siguiente:

- 1- Reconocimiento de los puntos que conforman la geometría a mallar.
- 2- Generación de una malla inicial, esta malla es un rectángulo que contiene a la figura a ser mallada.
- 3- Refinamiento de la malla.
- 4- Como hay diversos puntos que no se encuentran dentro de la geometría a ser mallada se procede a determinar cuáles están dentro y cuáles fuera.
- 5- Triangulación de Delaunay.

Toda esta secuencia de pasos de cómo el programa obtiene la malla computacional es mostrada en las figuras 5.36, 5.37, 5.38 y 5.39. La figura 5.40 representa una variación de la malla final.

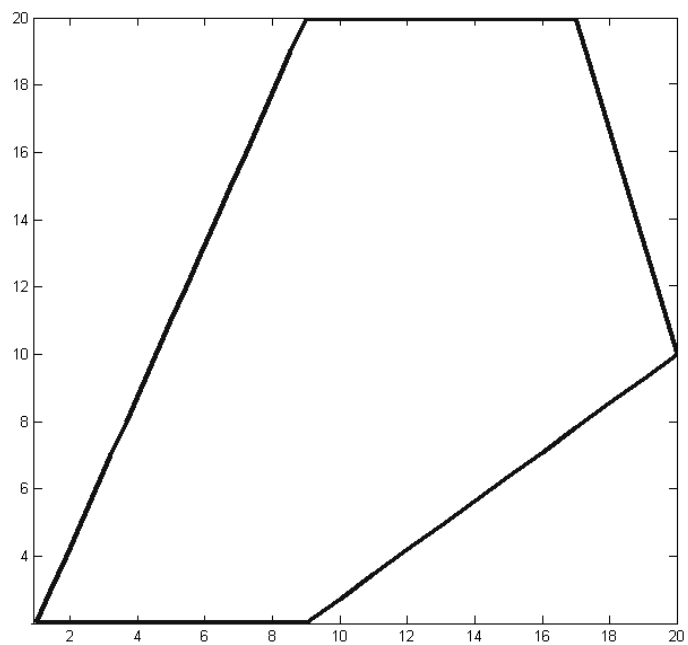


Fig. 5.36- Generación de objeto a ser discretizado.

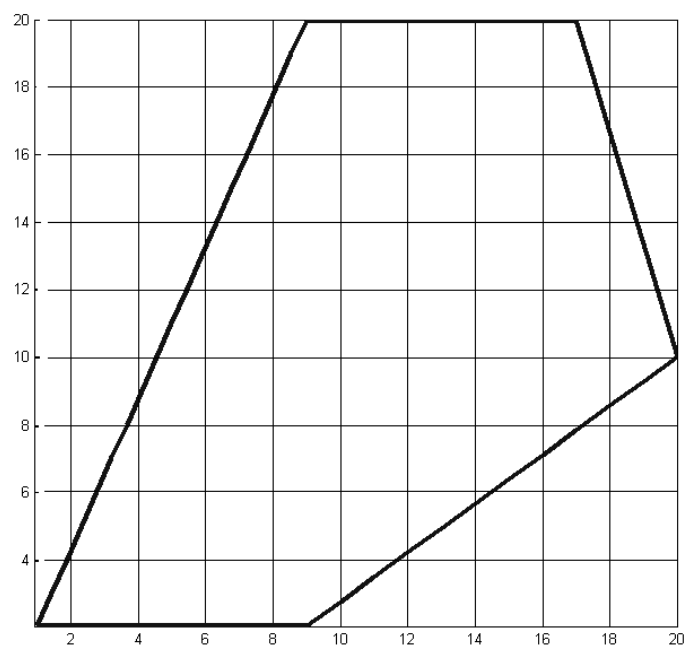


Fig. 5.37-Generación de malla preliminar.

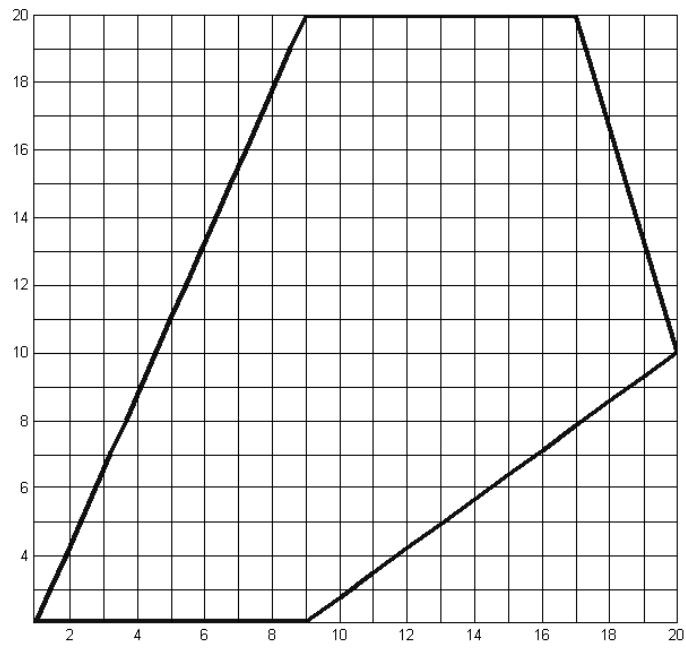


Fig. 5.38-Refinamiento de malla.

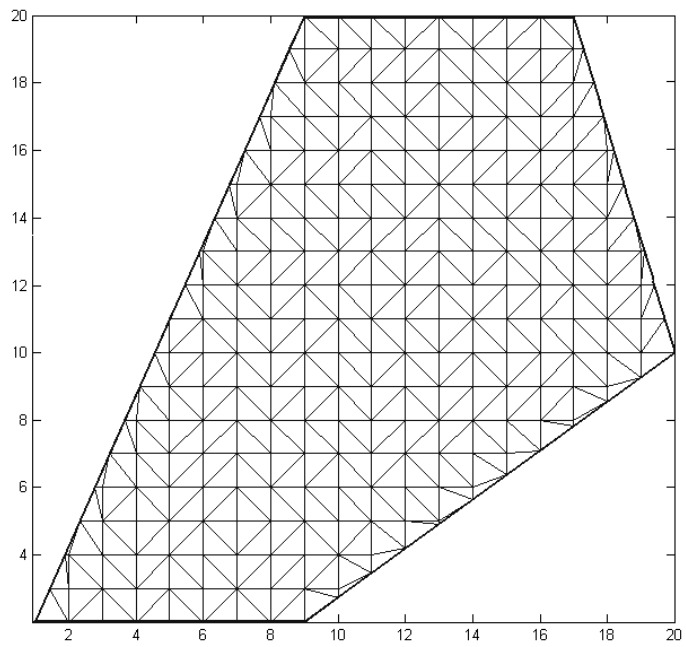


Fig. 5.39-Malla finiquitada mediante triangulación Delaunay.

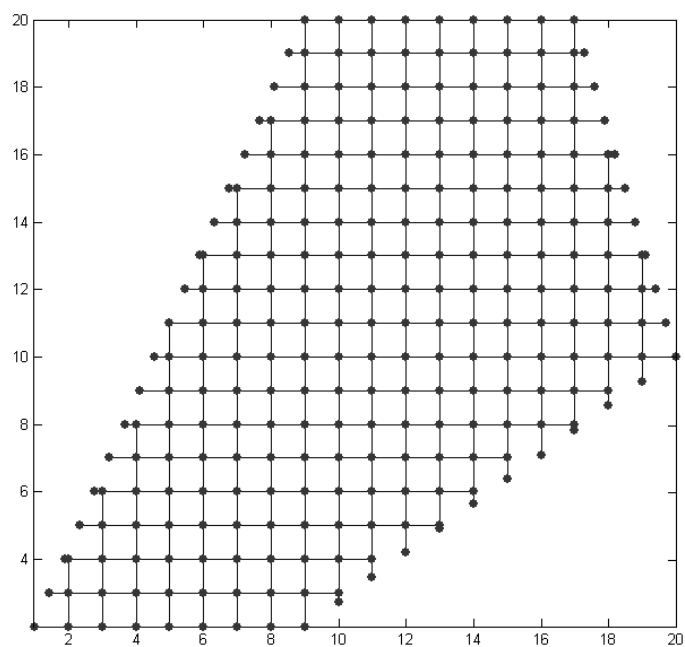


Fig. 5.40-Malla opcional generada por PHITA – 10X.

CAPITULO VI

VI- ANÁLISIS DE UN PERFIL NACA MEDIANTE EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

6.1- Introducción

La Mecánica de Fluidos Computacional, es una área de extrema importancia en la Aerodinámica actual, el modelamiento matemático para la gran mayoría de los fenómenos aerodinámicos reales envuelve un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de difícil manipulación analítica.

Hasta el surgimiento de los primeros recursos computacionales, esas dificultades eran suprimidas solamente por el uso extensivo de ensayos en túneles de viento y en vuelo. Los ensayos realizados en túneles de viento y en vuelo son generalmente caros en comparación con pruebas computacionales.

La creación de computadores más potentes y la elaboración y estudio de métodos numéricos cada vez más eficaces, está permitiendo que sean obtenidos resultados cada vez más confiables disminuyendo la cantidad de experiencias en laboratorio.

6.2- Fases Para La Solución Numérica

Para hacer un estudio de un fenómeno físico cualquiera se puede optar por métodos teóricos o ensayos en laboratorio, pero incluso éstos últimos, deben estar basados en análisis teóricos previos. Por lo tanto, inicialmente, se debe modelar el problema físico; este modelamiento debe determinar que propiedades físicas (como temperatura, presión, densidad) actúan sobre el sistema físico, y como ellas lo afectan. A continuación se elabora un modelo a partir de la aplicación de principios físicos, descritos por leyes de conservación adecuadas al fenómeno, como conservación de masa, energía y momento.

Los modelos resultantes son expresados por ecuaciones que relacionan las propiedades relevantes entre si, para un continuo de espacio y tiempo.

Frecuentemente, estos modelos solo admiten soluciones analíticas si se hacen simplificaciones, como despreciar una propiedad o relaciones entre propiedades. En general, problemas de mecánica de fluidos no poseen soluciones analíticas conocidas, ni disponemos de medios, todavía, para determinar esas soluciones. Métodos experimentales y, más recientemente, computacionales son entonces, utilizados para verificar la validez del método teórico.

Para tratar el modelo computacionalmente, es necesario expresar de forma adecuada las ecuaciones y la región (dominio) en que ellas son validas. Como no podemos obtener soluciones numéricas sobre una región continua, debido a los infinitos puntos de la misma, inicialmente el dominio es discretizado, es decir dividido en puntos. Solamente en esos puntos las soluciones serán obtenidas. Al conjunto de los puntos discretos se da el nombre de malla. La distribución adecuada de los puntos en el dominio es fundamental para obtener una solución numérica representativa del flujo. En seguida, los términos que aparecen en las ecuaciones son escritos en función de los valores de las incógnitas en puntos discretos adyacentes. El resultado es un conjunto de ecuaciones algebraicas, generalmente lineales, que pueden o no estar acopladas. En esa etapa se introducen las condiciones de contorno del problema, normalmente modificándose apropiadamente las ecuaciones para puntos cercanos de las fronteras. Las condiciones de contorno, unidas a las condiciones iniciales, las propiedades físicas del fluido y los parámetros del flujo especifican el problema a ser tratado.

Finalmente, las ecuaciones algebraicas son resueltas, suministrando la solución del problema. Ésta debe, en ese momento, ser analizada para verificar si está correcta, solamente después es que se puede extraer del flujo, con alguna confiabilidad, las informaciones de interés del usuario.

La figura 6.1 resume las etapas mencionadas anteriormente.

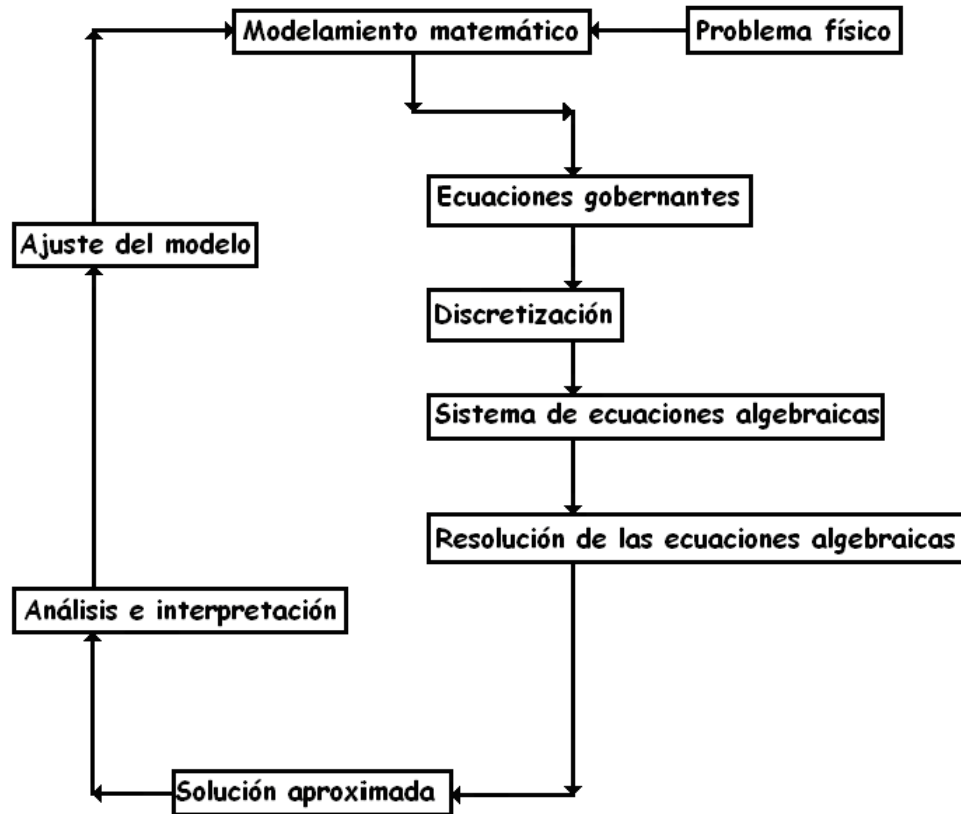


Fig. 6.1- Etapas para la obtención de la solución numérica de un problema de fluidos.

6.3- Problema Físico

El problema que nos planteamos es el estudio del flujo estacionario, bidimensional e incompresible alrededor de un perfil aerodinámico. El flujo lejos del perfil tiene una velocidad uniforme V e incide sobre el perfil con un ángulo de ataque α como se indica en la figura 6.2.

El ángulo de ataque es el ángulo formado por la corriente no perturbada y la cuerda del perfil. Supondremos que la densidad ρ y la viscosidad μ del fluido son constantes.

La geometría del perfil viene caracterizada por la cuerda c , el espesor máximo t y la curvatura máxima h , así como la posición axial del punto de máxima curvatura. La envergadura del perfil es b .

A continuación mostramos un perfil sin curvatura, el cual, es un perfil NACA 0012 y representa nuestro objeto de estudio.

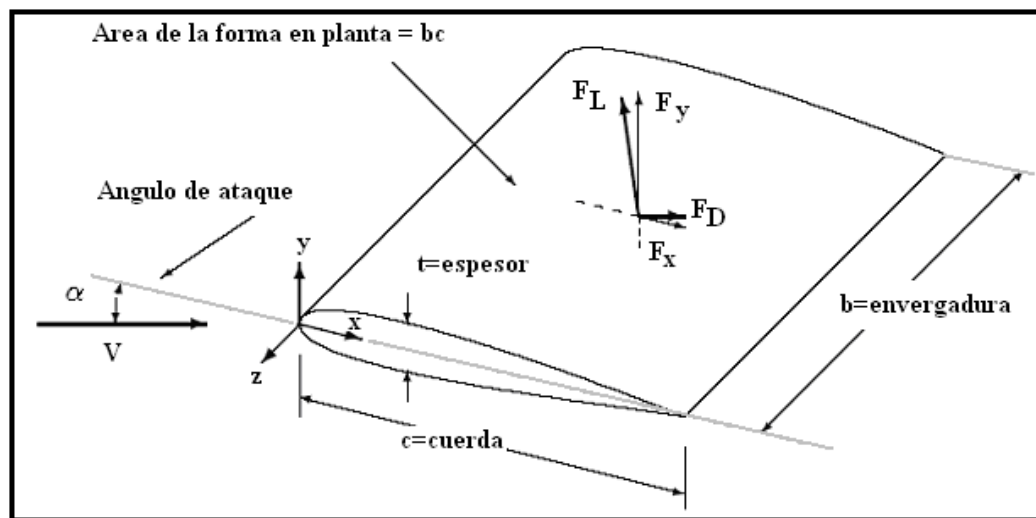


Fig. 6.2- Representación esquemática de un perfil aerodinámico indicando los principales parámetros geométricos.

6.4- Modelamiento Matemático

6.4.1-Introducción

La solución numérica de flujo de fluidos, transferencia de calor, transferencia de masa, combustión, etc. Comienzan por la formulación de estos fenómenos. Las ecuaciones gobernantes son expresadas generalmente en la forma de ecuaciones diferenciales.

La ecuación diferencial que modela el flujo de fluidos compresibles e incompresibles, turbulentos y laminares es la ecuación general de conservación de fenómenos de transporte. Esta ecuación diferencial es utilizada como punto de partida para el procedimiento computacional en volúmenes finitos.

6.4.2- Forma diferencial de la ecuación de conservación

La ecuación de transporte de forma general puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(\rho.\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho.\vec{u}.\phi) = \nabla(\Gamma_{\phi}.\nabla\phi) + S_{\phi} \quad (6.1)$$

Donde:

ϕ : Es la propiedad a ser transportada (u,v,w,T,h, etc.)

Γ_{ϕ} : Es el coeficiente de difusividad de la propiedad transportada

ρ : Densidad del fluido.

\vec{u} : Es el campo de velocidades $\vec{u} = (u, v, w)$

$\frac{\partial(\rho.\phi)}{\partial t}$: Es el término transitorio, representa las variaciones locales de la propiedad transportada.

$\nabla(\rho.\vec{u}.\phi)$: Es el término convectivo, realiza el transporte de la propiedad debido al movimiento del fluido.

$\nabla(\Gamma_\phi \cdot \nabla \phi)$: Es el término difusivo, realiza el transporte de la propiedad debido a la tendencia del fluido al equilibrio

S_ϕ : Es el término fuente, completa la ecuación de conservación, en ésta se incluirá cualquier otro término de la ecuación que gobierna un fenómeno físico determinado que no está incluido en los otros tres anteriores.

El modelo matemático de esta tesis está basada en las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y la ecuación de energía. Si bien estas ecuaciones fueron representadas por una única ecuación diferencial (Ecuación general de conservación de fenómenos de transporte), lo que se muestra a continuación será la demostración de esta afirmación, es decir se demostrará como se obtiene la ecuación de continuidad, cantidad de movimiento y la ecuación de energía a través de la ecuación general de conservación de fenómenos de transporte.

6.4.3- Ecuación de continuidad

Si en la ecuación 6.1 asumimos que:

$$\phi = 1 \quad \Gamma_\phi = 0 \quad S_\phi = 0$$

Obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{U}) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \nabla(\rho(u, v, w)) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \nabla(\rho u, \rho v, \rho w) = 0$$

Finalmente obtenemos la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (6.2)$$

6.4.4- Ecuación de cantidad de movimiento

Componente – X

Si en la ecuación 6.1 asumimos que:

$$\phi = u \quad \Gamma_{\phi} = \mu \quad S_{\phi} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

Obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{U} \cdot u) = \nabla(\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho(u, v, w).u) = \nabla(\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho uu, \rho vu, \rho wu) = \nabla(\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \nabla(\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Para el lado derecho de la ecuación anterior,

$$\nabla(\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x} = \nabla \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\nabla(\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x} = \nabla \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\nabla(\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Entonces se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (6.3)$$

Componente – Y

Si en la ecuación 6.1 asumimos que:

$$\phi = v \quad \Gamma_{\phi} = \mu \quad S_{\phi} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

Obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho.v)}{\partial t} + \nabla(\rho.\bar{U}.v) = \nabla(\mu.\nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho.v)}{\partial t} + \nabla(\rho.(u, v, w).v) = \nabla(\mu.\nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho.v)}{\partial t} + \nabla(\rho uv, \rho vv, \rho wv) = \nabla(\mu.\nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho.v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \nabla(\mu.\nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Para el lado derecho de la ecuación anterior

$$\nabla(\mu \cdot \nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y} = \nabla \left(\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\nabla(\mu \cdot \nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y} = \nabla \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}, \mu \frac{\partial v}{\partial y}, \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\nabla(\mu \cdot \nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Entonces se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (6.4)$$

Componente – Z

Si en la ecuación 6.1 asumimos que:

$$\phi = w \quad \Gamma_\phi = \mu \quad S_\phi = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

Obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho.w)}{\partial t} + \nabla(\rho.\vec{U}.w) = \nabla(\mu.\nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(\rho.w)}{\partial t} + \nabla(\rho.(u, v, w).w) = \nabla(\mu.\nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(\rho.w)}{\partial t} + \nabla(\rho uw, \rho vw, \rho ww) = \nabla(\mu.\nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(\rho.w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \nabla(\mu.\nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\nabla(\mu.\nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z} = \nabla\left(\mu.\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\nabla(\mu.\nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z} = \nabla\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}, \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\nabla(\mu.\nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial z}$$

Entonces se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho.w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (6.5)$$

6.4.5- Ecuación de la energía

Si en la ecuación 6.1 asumimos que:

$$\phi = T \quad \Gamma_\phi = \frac{k}{C_p} \quad S_\phi = 0$$

Obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{U} T) = \nabla \left(\frac{k}{C_p} \nabla T \right)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla(\rho(u, v, w) T) = \nabla \left(\frac{k}{C_p} \nabla T \right)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla(\rho u T, \rho v T, \rho w T) = \nabla \left(\frac{k}{C_p} \nabla T \right)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w T)}{\partial z} = \nabla \left(\frac{k}{C_p} \nabla T \right)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w T)}{\partial z} = \nabla \left(\frac{k}{C_p} \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w T)}{\partial z} = \nabla \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Finalmente obtenemos la ecuación de energía:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (6.6)$$

6.5 Modelamiento Numérico

6.5.1-Discretización de la ecuación general de transporte

Como se mencionó en capítulos anteriores el dominio es dividido en un número de volúmenes de control de manera que exista un volumen de control alrededor de cada punto nodal.

La ecuación general de conservación de fenómenos de transporte es integrada sobre cada volumen de control para obtener una ecuación algebraica conteniendo los valores de ϕ en los puntos nodales.

La ecuación de discretización resultante expresa el principio de conservación para un volumen de control finito, así como la ecuación diferencial expresa lo mismo para un volumen de control infinitesimal.

La ecuación resultante implica que el principio de conservación integral es perfectamente satisfecho para cualquier grupo de volúmenes de control, y consecuentemente para todo el dominio.

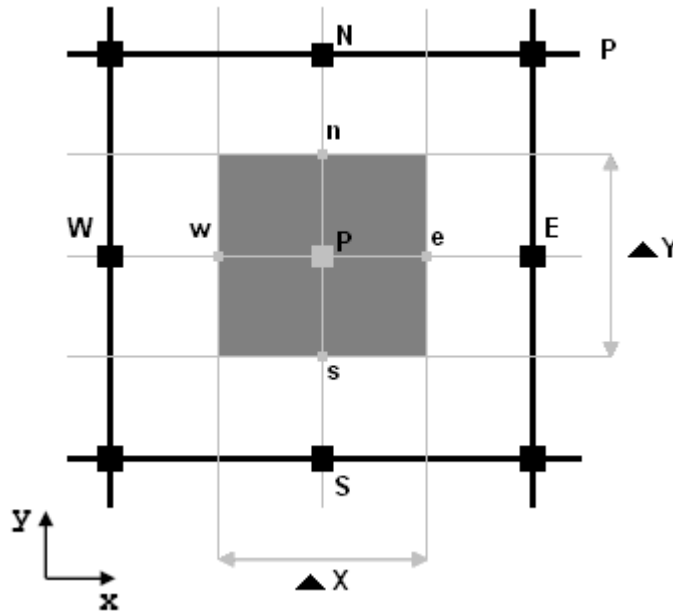


Fig. 6.3- Volumen de control.

Las letras minúsculas n , s , e y w que aparecen en la figura 6.3 representan, respectivamente, los puntos cardinales norte, sur, este y oeste y es la nomenclatura usada para identificar las caras del volumen de control en la discretización numérica.

Para obtener las ecuaciones aproximadas mediante el método de volúmenes finitos se tiene que partir de la ecuación diferencial, integrarla sobre el volumen de control elemental, en el espacio y en el tiempo.

Si en la ecuación general de transporte (Ecuación 6.1) definimos al flujo en estado estacionario obtenemos la ecuación siguiente:

$$\nabla(\rho \vec{U} \cdot \phi) = \nabla(\Gamma_\phi \cdot \nabla \phi) + S_\phi \quad (6.7)$$

Si además definimos al flujo como bidimensional obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho u \cdot \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot \phi)}{\partial y} = \nabla(\Gamma_\phi \cdot \nabla \phi) + S_\phi \quad (6.8)$$

Multiplicando términos obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho u \cdot \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot \phi)}{\partial y} = \nabla \left(\Gamma_\phi \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) + S_\phi$$

$$\frac{\partial(\rho u \cdot \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot \phi)}{\partial y} = \nabla \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}, \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi$$

$$\frac{\partial(\rho u \cdot \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot \phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad (6.9)$$

Integrando la ecuación anterior sobre un volumen de control,

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho u \cdot \phi)}{\partial x} dV + \int_{VC} \frac{\partial(\rho v \cdot \phi)}{\partial y} dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV + \int_{VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV + \int_{VC} S_\phi dV$$

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\int_{SC} (\rho u \cdot \phi) dS + \int_{SC} (\rho v \cdot \phi) dS = \int_{SC} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dS + \int_{SC} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dS + \overline{S_\phi} \Delta V$$

$$(\rho u \cdot \phi A)_e - (\rho u \cdot \phi A)_w + (\rho v \cdot \phi A)_n - (\rho v \cdot \phi A)_s =$$

$$\left(A \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(A \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \left(A \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(A \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s + \overline{S_\phi} \Delta V \quad (6.10)$$

Aplicando diferencias centradas en la ecuación 6.10 se obtiene la siguiente ecuación:

$$(\rho u \cdot \phi A)_e - (\rho u \cdot \phi A)_w + (\rho v \cdot \phi A)_n - (\rho v \cdot \phi A)_s =$$

$$\left(A \Gamma_\phi \right)_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X} \right) - \left(A \Gamma_\phi \right)_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X} \right) + \left(A \Gamma_\phi \right)_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta Y} \right) - \left(A \Gamma_\phi \right)_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta Y} \right) + \overline{S_\phi} \Delta V \quad (6.11)$$

Si definimos:

$$F_i = \rho_i u_i \quad (6.12)$$

Obtenemos:

$$(F \cdot \phi A)_e - (F \cdot \phi A)_w + (F \cdot \phi A)_n - (F \cdot \phi A)_s =$$

$$\left(A \Gamma_\phi \right)_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X} \right) - \left(A \Gamma_\phi \right)_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X} \right) + \left(A \Gamma_\phi \right)_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta Y} \right) - \left(A \Gamma_\phi \right)_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta Y} \right) + \overline{S_\phi} \Delta V \quad (6.13)$$

Si además definimos:

$$D_i = \frac{\Gamma_\phi}{\Delta L_i} \quad (6.14)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} (F.\phi A)_e - (F.\phi A)_w + (F.\phi A)_n - (F.\phi A)_s = \\ \left(\frac{\Gamma_\phi}{\Delta X} \right)_e A_e (\phi_E - \phi_P) - \left(\frac{\Gamma_\phi}{\Delta X} \right)_w A_w (\phi_P - \phi_W) + \left(\frac{\Gamma_\phi}{\Delta Y} \right)_n A_n (\phi_N - \phi_P) - \left(\frac{\Gamma_\phi}{\Delta Y} \right)_s A_s (\phi_P - \phi_S) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F.\phi A)_e - (F.\phi A)_w + (F.\phi A)_n - (F.\phi A)_s = \\ (D)_e A_e (\phi_E - \phi_P) - (D)_w A_w (\phi_P - \phi_W) + (D)_n A_n (\phi_N - \phi_P) - (D)_s A_s (\phi_P - \phi_S) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_e \phi_e A_e - F_w \phi_w A_w + F_n \phi_n A_n - F_s \phi_s A_s = \\ D_e A_e (\phi_E - \phi_P) - D_w A_w (\phi_P - \phi_W) + D_n A_n (\phi_N - \phi_P) - D_s A_s (\phi_P - \phi_S) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned} \quad (6.15)$$

Aplicando interpolación UPWIND,

$$F_e \phi_e = \phi_P \|F_e, 0\| - \phi_E \| -F_e, 0\|$$

$$F_w \phi_w = \phi_W \|F_w, 0\| - \phi_P \| -F_w, 0\|$$

$$F_n \phi_n = \phi_P \|F_n, 0\| - \phi_N \| -F_n, 0\|$$

$$F_s \phi_s = \phi_S \|F_s, 0\| - \phi_P \| -F_s, 0\|$$

reemplazando:

$$\begin{aligned} & (\phi_P \|F_e, 0\| - \phi_E \| -F_e, 0\|) A_e - (\phi_W \|F_w, 0\| - \phi_P \| -F_w, 0\|) A_w + (\phi_P \|F_n, 0\| - \phi_N \| -F_n, 0\|) A_n - \\ & (\phi_S \|F_s, 0\| - \phi_P \| -F_s, 0\|) A_s = (D_e A_e \phi_E - D_e A_e \phi_P) - (D_w A_w \phi_P - D_w A_w \phi_W) + \\ & (D_n A_n \phi_N - D_n A_n \phi_P) - (D_s A_s \phi_P - D_s A_s \phi_S) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_e (\phi_P \|F_e, 0\|) - A_e (\phi_E \| -F_e, 0\|) - A_w (\phi_W \|F_w, 0\|) + A_w (\phi_P \| -F_w, 0\|) + A_n (\phi_P \|F_n, 0\|) - \\ & A_n (\phi_N \| -F_n, 0\|) - A_s (\phi_S \|F_s, 0\|) + A_s (\phi_P \| -F_s, 0\|) = \\ & (D_e A_e \phi_E - D_e A_e \phi_P) - (D_w A_w \phi_P - D_w A_w \phi_W) + (D_n A_n \phi_N - D_n A_n \phi_P) - (D_s A_s \phi_P - D_s A_s \phi_S) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_e (\phi_P \|F_e, 0\|) + A_e D_e \phi_P + A_w (\phi_P \| -F_w, 0\|) + A_w D_w \phi_P + A_n (\phi_P \|F_n, 0\|) + A_n D_n \phi_P + \\ & A_s (\phi_P \| -F_s, 0\|) + A_s D_s \phi_P = D_e A_e \phi_E + A_e (\phi_E \| -F_e, 0\|) + D_w A_w \phi_W + A_w (\phi_W \|F_w, 0\|) + \\ & D_n A_n \phi_N + A_n (\phi_N \| -F_n, 0\|) + D_s A_s \phi_S + A_s (\phi_S \|F_s, 0\|) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned} \tag{6.16}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned} & \left[A_e (\|F_e, 0\| + D_e) + A_w (\| -F_w, 0\| + D_w) + A_n (\|F_n, 0\| + D_n) + A_s (\| -F_s, 0\| + D_s) \right] = \\ & D_e A_e \phi_E + A_e (\phi_E \| -F_e, 0\|) + D_w A_w \phi_W + A_w (\phi_W \|F_w, 0\|) + D_n A_n \phi_N + \\ & A_n (\phi_N \| -F_n, 0\|) + D_s A_s \phi_S + A_s (\phi_S \|F_s, 0\|) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[A_e (\|F_e, 0\| + D_e) + A_w (\|-F_w, 0\| + D_w) + A_n (\|F_n, 0\| + D_n) + A_s (\|-F_s, 0\| + D_s) \right] = \\ & A_e \phi_E (D_e + \|-F_e, 0\|) + A_w \phi_W (D_w + \|F_w, 0\|) + A_n \phi_N (D_n + \|-F_n, 0\|) + A_s \phi_S (D_s + \|F_s, 0\|) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_e (\|-F_e, 0\| + D_e + F_e) + A_w (\|F_w, 0\| + D_w - F_w) + A_n (\|-F_n, 0\| + D_n + F_n) + \\ & A_s (\|F_s, 0\| + D_s - F_s) = \phi_E A_e (D_e + \|-F_e, 0\|) + \phi_W A_w (D_w + \|F_w, 0\|) + \\ & \phi_N A_n (D_n + \|-F_n, 0\|) + \phi_S A_s (D_s + \|F_s, 0\|) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned} \quad (6.17)$$

si:

$$\partial_e = A_e (\|-F_e, 0\| + D_e)$$

$$\partial_w = A_w (\|F_w, 0\| + D_w)$$

$$\partial_n = A_n (\|-F_n, 0\| + D_n)$$

$$\partial_s = A_s (\|F_s, 0\| + D_s)$$

entonces dando forma se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & A_e (\|-F_e, 0\| + D_e) + (A_e F_e) + A_w (\|F_w, 0\| + D_w) - (A_w F_w) + A_n (\|-F_n, 0\| + D_n) + (A_n F_n) + \\ & A_s (\|F_s, 0\| + D_s) - (A_s F_s) = \phi_E A_e (\|-F_e, 0\| + D_e) + \phi_W A_w (\|F_w, 0\| + D_w) + \\ & \phi_N A_n (\|-F_n, 0\| + D_n) + \phi_S A_s (\|F_s, 0\| + D_s) + \overline{S_\phi} \Delta V \end{aligned} \quad (6.18)$$

Agrupando términos semejante obtenemos:

$$\left[\partial_e + (A_e F_e) + \partial_w - (A_w F_w) + \partial_n + (A_n F_n) + \partial_s - (A_s F_s) \right] = \phi_E \partial_e + \phi_W \partial_w + \phi_N \partial_n + \phi_S \partial_s + \overline{S_\phi} \Delta V$$

$$\left[\partial_e + \partial_w + \partial_n + \partial_s + (A_e F_e) - (A_w F_w) + (A_n F_n) - (A_s F_s) \right] = \phi_E \partial_e + \phi_W \partial_w + \phi_N \partial_n + \phi_S \partial_s + \overline{S_\phi} \Delta V$$

$$\left[(\partial_e + \partial_w + \partial_n + \partial_s) + (A_e F_e - A_w F_w + A_n F_n - A_s F_s) \right] = \phi_E \partial_e + \phi_W \partial_w + \phi_N \partial_n + \phi_S \partial_s + \overline{S_\phi} \Delta V \quad (6.19)$$

si,

$$\partial_P = (\partial_e + \partial_w + \partial_n + \partial_s - S_P)$$

y,

$$-S_P = A_e F_e - A_w F_w + A_n F_n - A_s F_s$$

finalmente obtenemos:

$$\partial_P \phi_P = \phi_E \partial_e + \phi_W \partial_w + \phi_N \partial_n + \phi_S \partial_s + \overline{S_\phi} \Delta V \quad (6.20)$$

6.5.2- Discretización de la ecuación de movimiento en la dirección X

Si:

$\phi = u$: Velocidad del flujo en la dirección "X"

$\Gamma_\phi = \mu$: Viscosidad dinámica del fluido

$S_\phi = -\frac{\partial P}{\partial x}$: Gradiente de presión en la dirección "X"

Remplazamos en la ecuación 6.9

$$\frac{\partial(\rho u.\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v.\phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi$$

obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho u.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v.u)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (6.21)$$

Discretización para un volumen interno

Calculando la velocidad $\vec{u}(I)$ en el centro de "P" del volumen de control deslocalizado en forma atrasada.

Las figuras 6.4 y 6.5 muestran un volumen de control deslocalizado para la velocidad u , la diferencia entre estas figuras es la notación empleada, para la figura 6.4 se empleo la notación utilizada en el MVF, mientras que para la figura 6.5 se empleó la notación usada en el MDF.

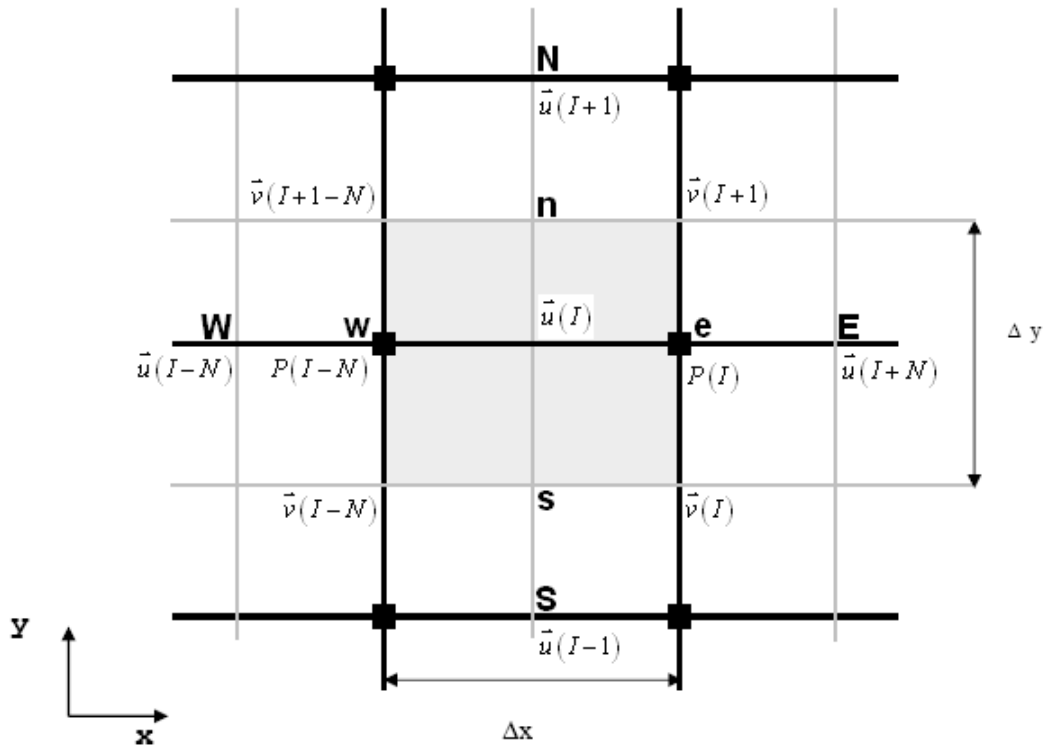


Fig. 6.4- Volumen de control deslocalizado para la velocidad u (MVF)

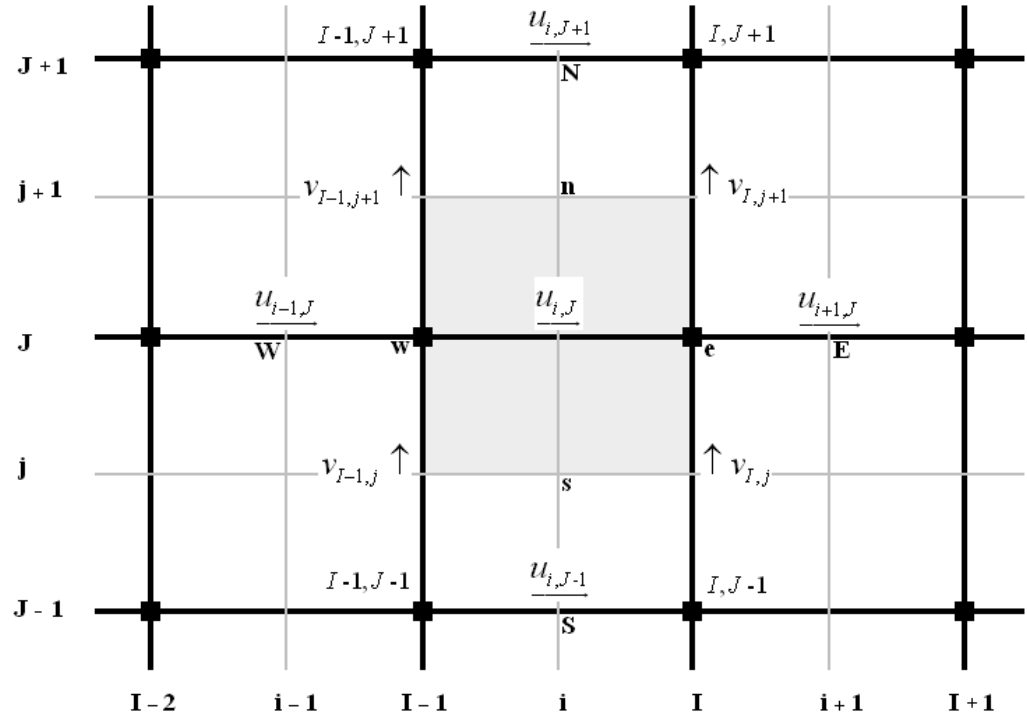


Fig. 6.5- Volumen de control deslocalizado para la velocidad u (MDF)

La discretización es similar al caso de una propiedad cualesquiera ϕ , pero en este caso deslocalizada.

$$\partial_P u_P = u_E \partial_e + u_W \partial_w + u_N \partial_n + u_S \partial_s + S_u \quad (6.22)$$

Donde:

$$\partial_P = (\partial_e + \partial_w + \partial_n + \partial_s - S_P)$$

$$-S_p = A_e F_e - A_w F_w + A_n F_n - A_s F_s$$

$$\partial_e = A_e \left(\| -F_e, 0 \| + D_e \right)$$

$$\partial_w = A_w \left(\| F_w, 0 \| + D_w \right)$$

$$\partial_n = A_n \left(\| -F_n, 0 \| + D_n \right)$$

$$\partial_s = A_s \left(\| F_s, 0 \| + D_s \right)$$

$$S_u = \Delta P A_x$$

Flujo Convectivo:

$$F_w = \frac{1}{2} \rho \| u(I) + u(I - N) \|$$

$$F_e = \frac{1}{2} \rho \| u(I + N) + u(I) \|$$

$$F_s = \frac{1}{2} \rho \| v(I) + v(I - N) \|$$

$$F_n = \frac{1}{2} \rho \|v(I+1) + v(I+1-N)\|$$

Flujo Difusivo:

$$D_w = \frac{\mu}{\Delta x}$$

$$D_e = \frac{\mu}{\Delta x}$$

$$D_s = \frac{\mu}{\Delta y}$$

$$D_n = \frac{\mu}{\Delta y}$$

Discretización para:

$$S_\phi = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

integrando sobre un volumen de control,

$$-\int_{VC} \frac{\partial P}{\partial x} dV$$

aplicando el teorema de Gauss:

$$-\int_{SC} P dA$$

entonces obtenemos:

$$-\Delta P . A_x$$

$$-\Delta P . A_x = [P(I - N) - P(I)] . A_x$$

6.5.3- Discretización de la ecuación de movimiento en la dirección Y

Si:

$\phi = v$: Velocidad del flujo en la dirección "Y"

$\Gamma_\phi = \mu$: Viscosidad dinámica del fluido

$$S_\phi = -\frac{\partial P}{\partial y} \text{ Gradiente de presión en la dirección "Y"}$$

Remplazamos en la ecuación 6.9

$$\frac{\partial(\rho u.\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v.\phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi$$

obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho u.v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v.v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (6.23)$$

Discretización para un volumen interno

Calculando la velocidad $\vec{v}(I)$ en el centro de "P" del volumen de control deslocalizado en forma atrasada.

Las figuras 6.6 y 6.7 muestran un volumen de control deslocalizado para la velocidad v, la diferencia entre estas figuras es la notación empleada, para la figura 6.6 se empleo la notación utilizada en el MVF, mientras que para la figura 6.7 se empleo la notación usada en el MDF.

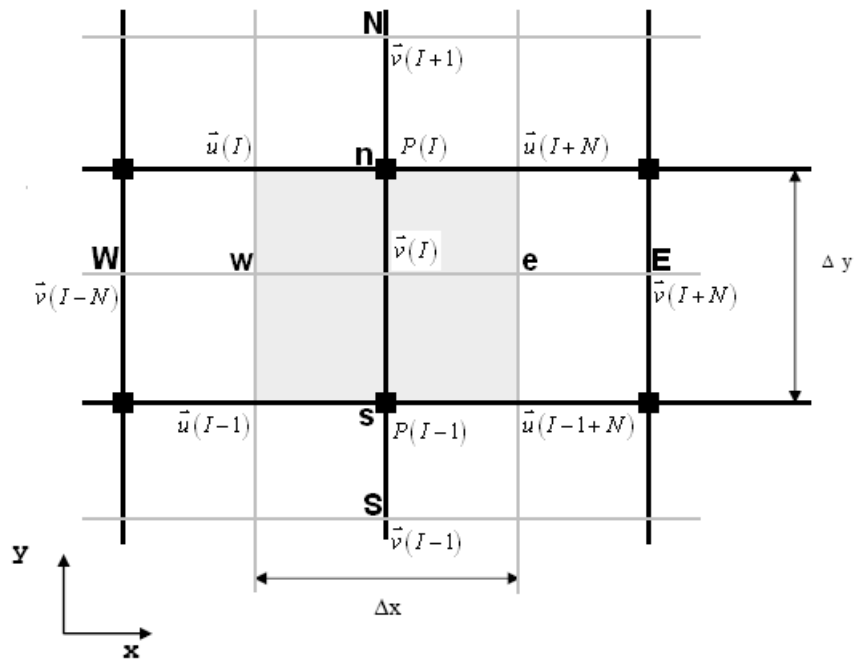


Fig. 6.6- Volumen de control deslocalizado para la velocidad v (MVF)

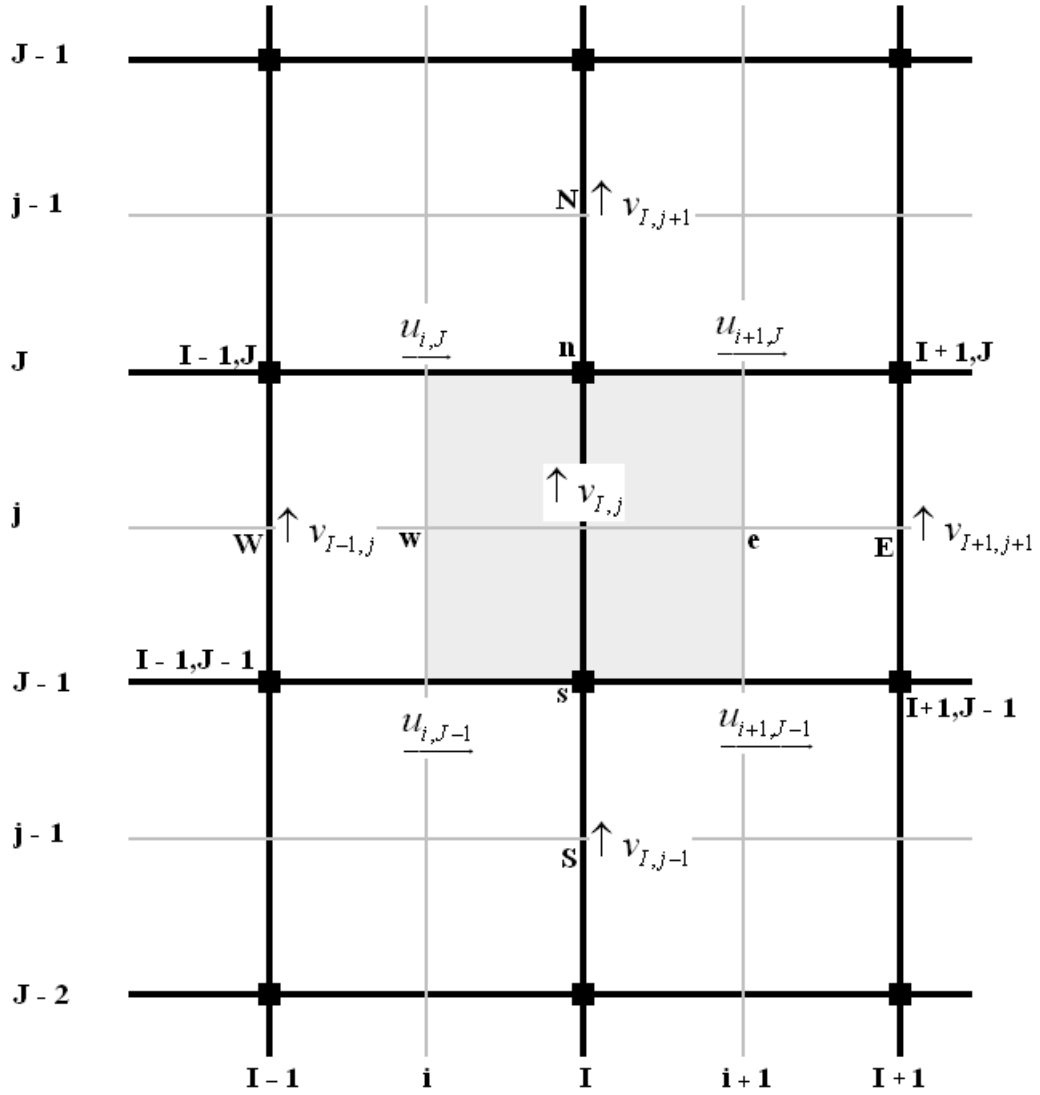


Fig. 6.7- Volumen de control deslocalizado para la velocidad v (MDF)

La discretización es similar al caso de una propiedad cualesquiera ϕ , pero en este caso deslocalizada.

$$\partial_P v_P = v_E \partial_e + v_W \partial_w + v_N \partial_n + v_S \partial_s + S_u \quad (6.24)$$

Donde:

$$\partial_P = (\partial_e + \partial_w + \partial_n + \partial_s - S_P)$$

$$-S_P = A_e F_e - A_w F_w + A_n F_n - A_s F_s$$

$$\partial_e = A_e \left(\| -F_e, 0 \| + D_e \right)$$

$$\partial_w = A_w \left(\| F_w, 0 \| + D_w \right)$$

$$\partial_n = A_n \left(\| -F_n, 0 \| + D_n \right)$$

$$\partial_s = A_s \left(\| F_s, 0 \| + D_s \right)$$

$$S_u = \Delta P A_y$$

Flujo Convectivo

$$F_w = \frac{1}{2} \rho \| u(I) + u(I-1) \|$$

$$F_e = \frac{1}{2} \rho \| u(I+N) + u(I+N-1) \|$$

$$F_s = \frac{1}{2} \rho \|v(I-1) + v(I)\|$$

$$F_n = \frac{1}{2} \rho \|v(I) + v(I+1)\|$$

Flujo Difusivo:

$$D_w = \frac{\mu}{\Delta x}$$

$$D_e = \frac{\mu}{\Delta x}$$

$$D_s = \frac{\mu}{\Delta y}$$

$$D_n = \frac{\mu}{\Delta y}$$

Discretización para:

$$S_\phi = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

integrando sobre un volumen de control,

$$-\int_{VC} \frac{\partial P}{\partial y} dV$$

aplicando el teorema de Gauss:

$$-\int_{SC} P dA$$

entonces obtenemos:

$$-\Delta P \cdot A_y$$

$$-\Delta P \cdot A_y = [P(I-1) - P(I)] \cdot A_y$$

6.5.4- Discretización de la ecuación de continuidad

Partiendo de la ecuación de continuidad en su forma diferencial y mediante un balance de masa dentro de un VC obtenemos la ecuación 6.25

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$(\rho u.A)_e - (\rho u.A)_w + (\rho u.A)_n - (\rho u.A)_s = 0 \quad (6.25)$$

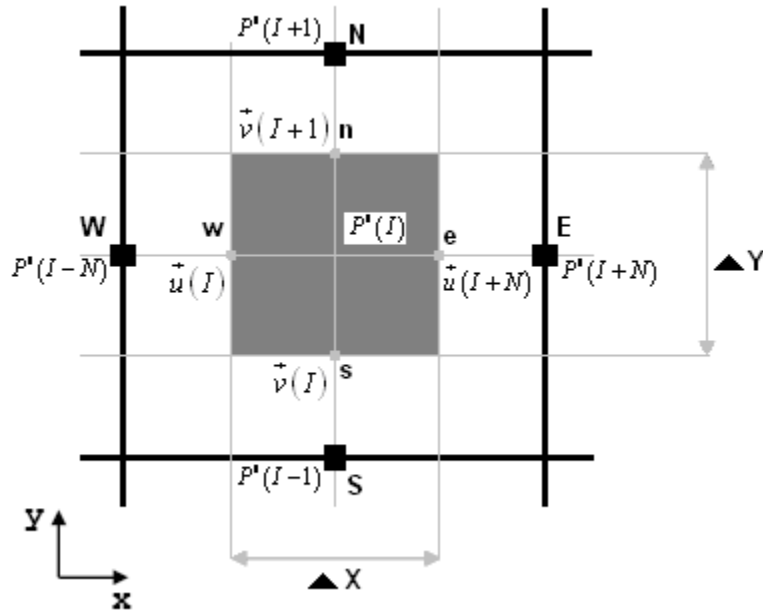


Fig. 6.8- Volumen de control deslocalizado en forma atrasada.

como el flujo es incomprensible,

$$(u.A)_e - (u.A)_w + (u.A)_n - (u.A)_s = 0 \quad (6.26)$$

el campo de velocidades (u, v) calculado debe de satisfacer la ecuación de continuidad.

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_p - P'_E)$$

$$u_w = u_w^* + d_w (P'_W - P'_P)$$

$$u_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N)$$

$$u_s = v_s^* + d_s (P'_S - P'_P)$$

reemplazando los valores en la ecuación 6.26

$$(u_e)A_e - (u_w)A_w + (u_n)A_n - (u_s)A_s = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \right) A_e - \left(u_w^* + d_w (P'_W - P'_P) \right) A_w + \\ & \left(v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \right) A_n - \left(v_s^* + d_s (P'_S - P'_P) \right) A_s = 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

ordenando

$$\begin{aligned} & \left(u_e^* A_e + d_e A_e P'_P - d_e A_e P'_E \right) - \left(u_w^* A_w + d_w A_w P'_W - d_w A_w P'_P \right) + \\ & \left(v_n^* A_n + d_n A_n P'_P - d_n A_n P'_N \right) - \left(v_s^* A_s + d_s A_s P'_S - d_s A_s P'_P \right) A_s = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

agrupando términos semejantes,

$$\begin{aligned} [d_e A_e + d_w A_w + d_n A_n + d_s A_s] P_P' &= d_e A_e P_E' + d_w A_w P_W' + d_n A_n P_N' + d_s A_s P_S' + \\ (u_w^* A_w) - (u_e^* A_e) + (v_s^* A_s) - (v_n^* A_n) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [d_e A_e + d_w A_w + d_n A_n + d_s A_s] P_P' &= d_e A_e P_E' + d_w A_w P_W' + d_n A_n P_N' + d_s A_s P_S' + \\ (u_w^* A_w) - (u_e^* A_e) + (v_s^* A_s) - (v_n^* A_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

si:

$$d_e A_e = \partial_e$$

$$d_w A_w = \partial_w$$

$$d_n A_n = \partial_n$$

$$d_s A_s = \partial_s$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} [\partial_e + \partial_w + \partial_n + \partial_s] P_P' &= \\ \partial_e P_E' + \partial_w P_W' + \partial_n P_N' + \partial_s P_S' + (u_w^* A_w) - (u_e^* A_e) + (v_s^* A_s) - (v_n^* A_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6.30)$$

si:

$$\partial_P = [\partial_e + \partial_w + \partial_n + \partial_s]$$

y

$$S_u = (u_w^* A_w) - (u_e^* A_e) + (v_s^* A_s) - (v_n^* A_n)$$

obtenemos finalmente:

$$[\partial_P] P'_P = \partial_e P'_E + \partial_w P'_W + \partial_n P'_N + \partial_s P'_S + S_u \quad (6.31)$$

6.6 Algoritmo SIMPLE

Este algoritmo desarrollado por Patankar y Spalding en 1972 determina el campo de presiones P como la mejor aproximación de un campo estimado P^* más una corrección P' la cual es calculada a partir de la ecuación de continuidad.

Consideremos un campo de presiones asumido P^* , reemplazando ésta en la ecuación de momento, para la velocidad U_w^* , resulta:

$$a_p U_w^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + (P_w^* - P_p^*) A_w \quad (6.32)$$

Si tuviéramos el campo correcto de presiones P , reemplazaríamos ésta en la ecuación de momento, para la velocidad U_w , resulta:

$$a_p.U_w = \sum a_{nb}.U_{nb} + (P_w - P_p).A_w \quad (6.33)$$

Donde:

U_w^* : Velocidad estimada, en la cara oeste, calculando a partir de un campo de presión asumida P^*

U_w : Velocidad correcta, en la cara oeste, calculando a partir de un campo correcto de presiones de P .

Sustrayendo las ecuaciones 6.32 y 6.33,

$$\begin{aligned} a_p.U_w^* - a_p.U_w &= \left(\sum a_{nb}.U_{nb}^* + (P_w^* - P_p^*).A_w \right) - \left(\sum a_{nb}.U_{nb} + (P_w - P_p).A_w \right) \\ a_p.U_w^* - a_p.U_w &= \left(\sum a_{nb}.U_{nb}^* - \sum a_{nb}.U_{nb} \right) + (P_w^* - P_p^*).A_w - (P_w - P_p).A_w \end{aligned} \quad (6.34)$$

Considerando todos sus coeficientes constantes y despreciando la diferencia entre $U_{nb} - U_{nb}^*$

$$\begin{aligned} a_p.U_w^* - a_p.U_w &= (P_w^* - P_p^*).A_w - (P_w - P_p).A_w \\ a_p.(U_w^* - U_w) &= A_w \left[(P_w^* - P_p^*) - (P_w - P_p) \right] \end{aligned} \quad (6.35)$$

obtenemos la ecuación de velocidad:

$$U_w = U_w^* + \frac{A_w}{a_p} (P'_w - P'_p) \quad (6.36)$$

De igual manera para las otras caras:

$$U_e = U_e^* + \frac{A_e}{a_p} (P'_p - P'_E) \quad (6.37)$$

$$V_s = U_s^* + \frac{A_s}{a_p} (P'_S - P'_p) \quad (6.38)$$

$$V_n = U_n^* + \frac{A_n}{a_p} (P'_p - P'_N) \quad (6.39)$$

Este conjunto de velocidades debe de satisfacer la ecuación de continuidad, entonces a partir de la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(u.A)_e - (u.A)_w + (v.A)_n - (v.A)_s = 0$$

Reemplazando se obtiene:

$$a_P P'_P = a_W P'_W + a_E P'_E + a_S P'_S + a_N P'_N + S_u \quad (6.40)$$

Donde:

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P$$

Además

$$a_W : (dA)_w$$

$$a_E : (dA)_e$$

$$a_S : (dA)_s$$

$$a_N : (dA)_n$$

$$S_u = (u^* . A)_w - (u^* . A)_e + (v^* . A)_s - (v^* . A)_n$$

Después de haber calculado P' se obtiene el campo correcto de presiones P de la siguiente manera:

$$P = P^* + P'$$

Luego el campo de velocidades es corregido para que se cumpla la ecuación de continuidad, para la próxima iteración: $P = P^*$ calculándose un nuevo campo de velocidades estimadas volviéndose a repetir todo el proceso hasta conseguir la convergencia.

1. La secuencia de operaciones del algoritmo SIMPLE es la siguiente:
2. Se estima el campo de presión P^* y un campo de velocidad: \mathbf{u}^* y \mathbf{v}^* .
3. Resolución de las ecuaciones de momento, a modo de obtener nuevas componentes del campo de velocidad: \mathbf{u}^* y \mathbf{v}^* ; asociadas al campo de presión P^* .
4. Se resuelve la ecuación de corrección de presión.
5. Se corrige la presión a partir de los valores de P' .
6. Se calculan los valores corregidos de las componentes de las velocidades: \mathbf{u} y \mathbf{v} , aplicando las fórmulas para la corrección de la velocidad.
7. Se resuelven las ecuaciones discretizadas para otro ϕ . Si una variable dependiente ϕ , en particular no influye el campo de flujo, se sugiere su cálculo después de una solución convergida para el campo de flujo.
8. Se trata el campo de presión corregido P como la nueva estimación de la presión: P^* ; se considera los valores corregidos de las componentes de la velocidad (\mathbf{u} y \mathbf{v}) como las nuevas componentes del campo imperfecto de velocidades (\mathbf{u}^* y \mathbf{v}^*).

9. Se retoma la etapa 2 repitiendo tales procedimientos hasta que la solución convergida sea obtenida.

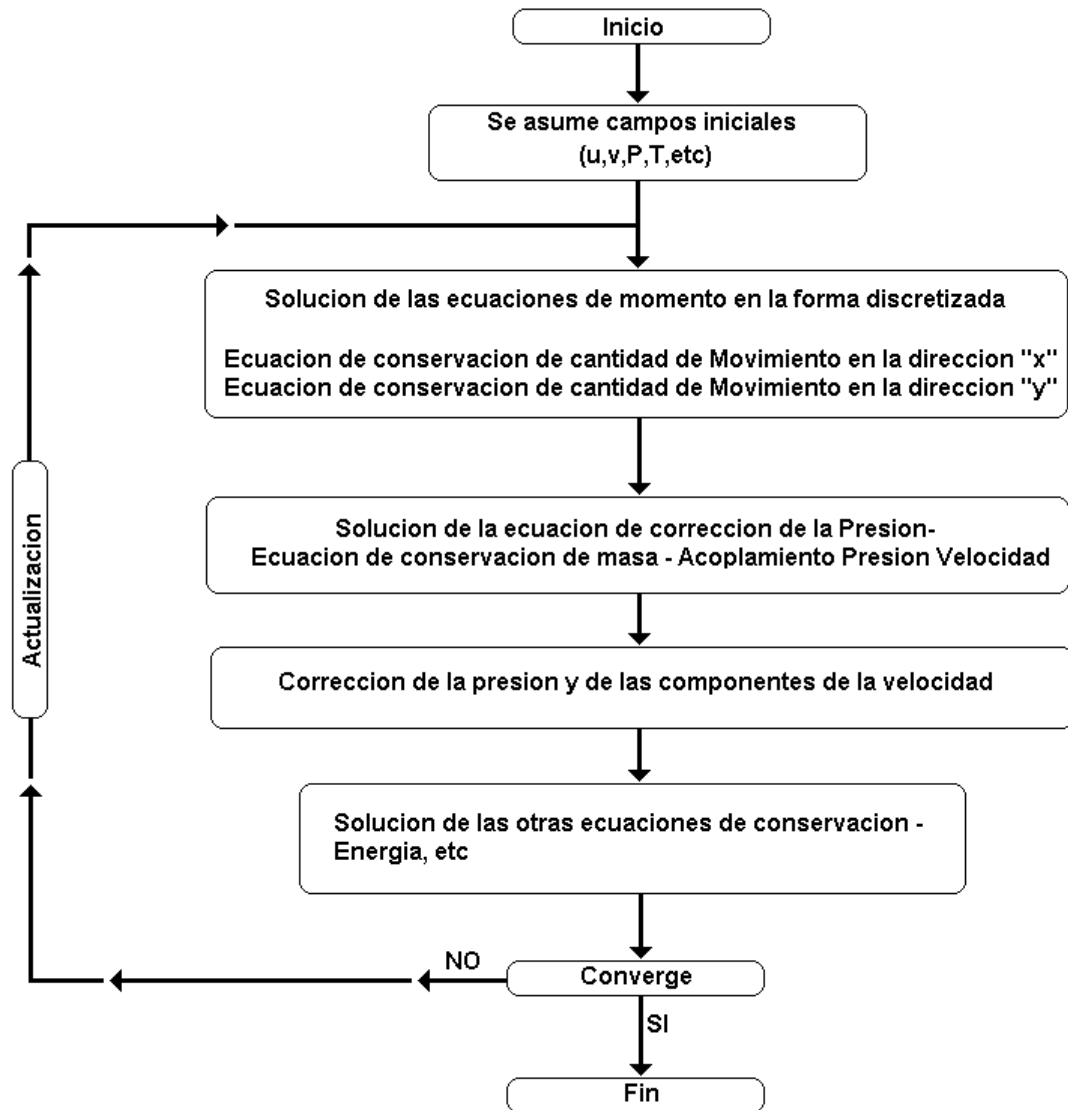


Fig. 6.9- Diagrama del algoritmo SIMPLE.

6.7 Sistema De Ecuaciones

Solución del sistema lineal

Para mallas estructuradas, uno de los métodos más empleados en el área de Mecánica de Fluidos Computacional es el algoritmo de Thomas, o TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm), como es más conocido.

Aparentemente, no es posible aplicar el TDMA para mallas no – estructuradas, pues no se tiene una línea definida, esto se debe a que los volúmenes de control no están a lo largo de líneas coordenadas. Esto no es verdad, en realidad se puede aplicar el TDMA a lo largo de cualquier línea, ya sea a lo largo de una línea coordenada o formando un zigzag, cuando los centros de los volúmenes de control son unidos por segmentos de rectas.

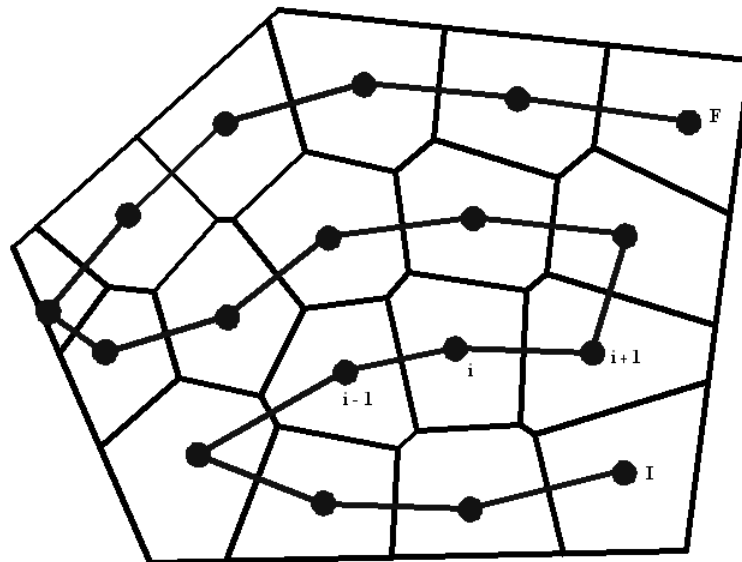


Fig. 6.10- TDMA a lo largo de una única línea.

Un caso extremo de la aplicación del método TDMA se puede observar en la figura 6.10. En esta figura fue determinada una línea que pasa por todos los volúmenes finitos, iniciándose en I y terminando en F. Tendríamos, entonces, un problema unidimensional a lo largo de esta línea, con cada línea de la matriz conteniendo tres elementos, conforme se puede ver para el elemento i , que esta conectado a los elementos $i-1$ y $i+1$. Todas las otras conexiones del elemento i con sus vecinos son reunidos en el término fuente. Este problema unidimensional es resuelto de forma directa, tantas veces fueran necesarias, para alcanzar la convergencia.

Es lógico que se torne difícil aplicar este proceso una vez que la tarea de encontrar la línea que pasa por todos los volúmenes de control es excesivamente compleja, una manera de enfrentar este problema es trabajar de manera semejante a la aplicada a mallas estructuradas, es decir trabajándose con zigzags cortos, como es mostrado en la figura 6.11.

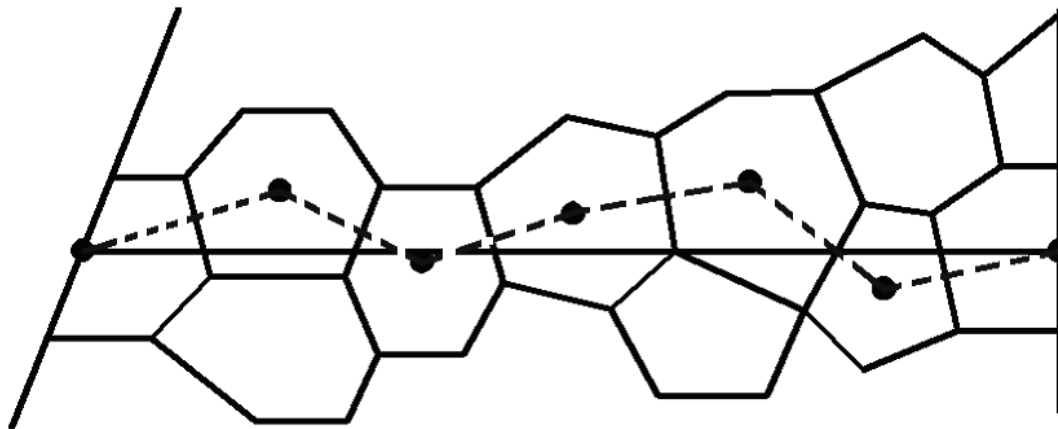


Fig. 6.11- TDMA a lo largo del Zigzag.

El procedimiento aplica el método TDMA a la línea punteada, colocando nuevamente en el término fuente las influencias de los vecinos que no están sobre el zigzag. La selección de sucesivos zigzags, barriendo todo el dominio en la vertical y en la horizontal, iterando hasta la convergencia, permite resolver el sistema lineal formado por matrices de banda variable, resolviendo sucesivas matrices tridiagonales. Tal método es denominado como NS – ADI (Non – Structured Alternating Direction Implicit).

La gran ventaja de este método es la transferencia directa de los métodos usados en mallas estructuradas para uso con mallas no – estructuradas.

Una de las cuestiones más importantes del método es obviamente la barredura que escoge los diversos zigzags. Se deben tomar precauciones para que los volúmenes no queden sin ser usados durante una barredura global del dominio. Si esto ocurre con frecuencia, tales volúmenes no tendrán sus valores actualizados, lo que influenciará la tasa de convergencia del procedimiento.

Existe en la literatura diversos métodos de solución de sistemas lineales oriundos de aproximaciones numéricas, obtenidos con discretización no estructurada, sin embargo en la presente tesis se escogió este método debido a su fácil implementación computacional.

6.8- Software THAYA - 10X

6.8.1-THAYA - 10X

THAYA - 10X es un software publicado bajo licencia pública que permite llevar a cabo ensayos fluidodinámicos en un ordenador, sirviendo de gran ayuda a todos los profesionales e investigadores que necesiten un túnel de viento virtual en sus trabajos e investigaciones. El programa es capaz de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible en geometrías 2D.

La herramienta informática diseñada proporciona información acerca de: los campos de velocidad, presión, temperatura, coeficientes de resistencia, sustentación y presión.

Mediante el uso de este software se pueden definir problemas de forma flexible y tratar geometrías complejas mediante el uso de Mallas Estructuradas y No – Estructuradas (Voronoi - Delaunay)

La discretización espacial se lleva a cabo mediante el método de los Volúmenes Finitos. Los mallados con que se trabaja están compuestos por volúmenes finitos 2D.

El software desarrollado **THAYA - 10X** se encarga de los métodos de cálculo y de la resolución del problema, pero otros procesos fundamentales como son la definición de la geometría, mallado de ésta y procesamiento de los datos deberán correr a cargo del software PHITA - 10X. Algunas propiedades del software PHITA - 10X así como su uso se explicaron en el capítulo cinco.

6.8.2-Objetivos

Los objetivos de la creación de este software son:

a-Dar a conocer a todos los profesionales e investigadores las capacidades del software, el cual permite realizar actividades de análisis y diseño de productos y procesos que involucran flujos de fluidos.

b-Obtener los campos de velocidad, presión, temperatura, coeficientes de resistencia, sustentación y presión.

c-Desarrollar un software CFD el cual tenga un importe asequible

6.8.3-Beneficios del software THAYA - 10X

Los Análisis de fluidos mediante el software THAYA - 10X, nos otorgan resultados bastante apegados a la realidad física, de ahí sus beneficios en la industria en una etapa de diseño (p.e. podemos determinar eficiencias aerodinámicas sin necesidad de tener un prototipo físico), haciendo esta etapa mucho más eficiente y costeable.

El software creado THAYA - 10X es abierto, esto significa que cualquier ingeniero, investigador, alumno, etc. puede mirar las partes del programa que le interesan y comparar con otros programas.

La importancia para la educación de que el software sea abierto, significa que se puede modificar. Cada usuario del software THAYA - 10X a su nivel, claro, pero interactuando con el mundo real, puede tener la satisfacción de haber contribuido detectando un error o programando una pequeña mejora.

El software THAYA - 10X es modificable, que sea modificable influye decisivamente en la calidad de los programas, en la aparición de nuevas ideas y caminos para la evolución del software.

Si un usuario quiere utilizar una función que no está bien implementada, o está mal documentada, se encuentra ante un problema de difícil solución, en el mundo del Software no libre, pero para alguien que sabe programar, cuando se trata de Software Libre, la solución consiste en examinar las líneas del código de la función, para conocerla mejor o para mejorarla.

Que el software sea abierto facilita la participación. Las personas que colaboran con la creación del software libre son un ejemplo de cooperación. Programar o participar en cualquier actividad, es implicarse en alguna medida en proyectos que están en marcha. Al implicarse en algún proyecto aumentan su interés y con ello potencian su aprendizaje. Para los usuarios, la participación desmitifica el software.

Cuando un usuario hace una pequeña aportación al Software, se siente parte del mismo, cambia su visión acerca de sus posibilidades de contribuir. Puede influir incluso en su visión acerca de sus potencialidades en cualquier rama de la ciencia o de la técnica, o de su posible aportación a la sociedad en general.

Colaborar en el mundo del Software Libre es una forma de altruismo que hace que las personas se relacionen y se impliquen con la sociedad que los rodea, no sólo en su formación como profesionales, sino también en su educación como personas.

Otro de los beneficios del software THAYA - 10X y en general del software libre es que tiene un precio inigualable. El precio del Software Libre es una de las grandes ventajas, tanto en la compra de la licencia como en el mantenimiento.

6.8.4-Requisitos de hardware

Dada la naturaleza del código desarrollado, éste puede ejecutarse sobre una de las arquitecturas más comunes existentes en el mercado. A continuación se enumeran las características de un equipo considerado óptimo:

Microprocesador	Familia Intel o AMD a 1.400 Mhz
Memoria RAM	256 Mbytes
Disco Duro	30 Gbytes
Tarjeta gráfica	Aceleradora 3D
Monitor	17 pulgadas

Tabla 6.1- Requisitos de hardware.

6.8.5-Requisitos de software

Los programas desarrollados THAYA -10X, PHITA - 10X y RUPAY - 10X fueron creados utilizando los lenguajes de programación Fortran y Matlab.

A continuación se enumeran los requerimientos del sistema.

Sistema Operativo	Windows 98/NT/2000/Me/XP
Compilador	Compaq Visual Fortran 6.6. Intel Fortran 7.0 Fortran PowerStation 4.0
	MATLAB Versión 6.5.0.180913a (R13)
	Java 1.3.1_01

Tabla 6.2- Requisitos de software.

6.8.6-Uso del software

Para hacer uso del software THAYA - 10X lo primero que se tiene que hacer es verificar que cumpla con los requerimientos de software y hardware, una vez que se ha cumplido con estos requisitos se procede a anexar el archivo que contiene la malla computacional, cabe mencionar que la malla computacional ya fue creada mediante el programa PHITA - 10X.

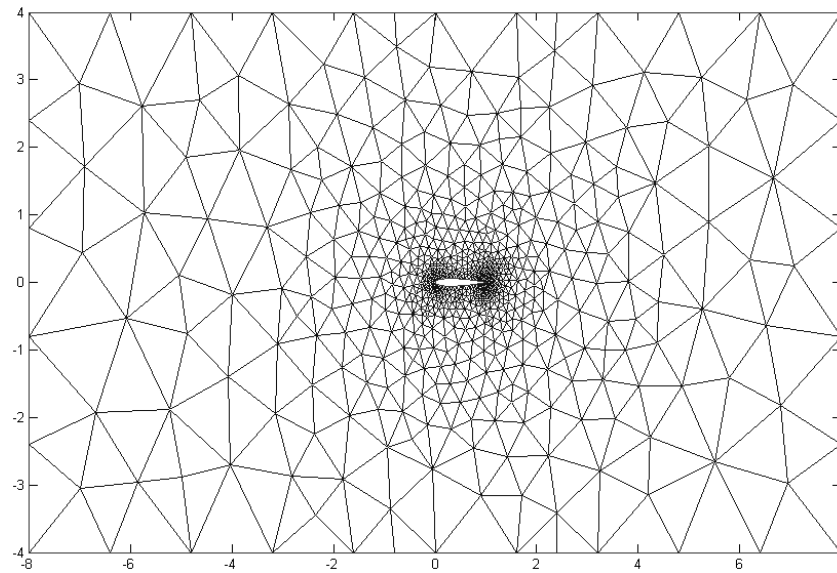


Fig. 6.12- Malla computacional.

Para poder analizar diversos casos con el **Software THAYA - 10X** se tiene que ingresar los parámetros de entrada mediante un archivo de texto o mediante teclado. La figura 6.13 muestra esta última opción.

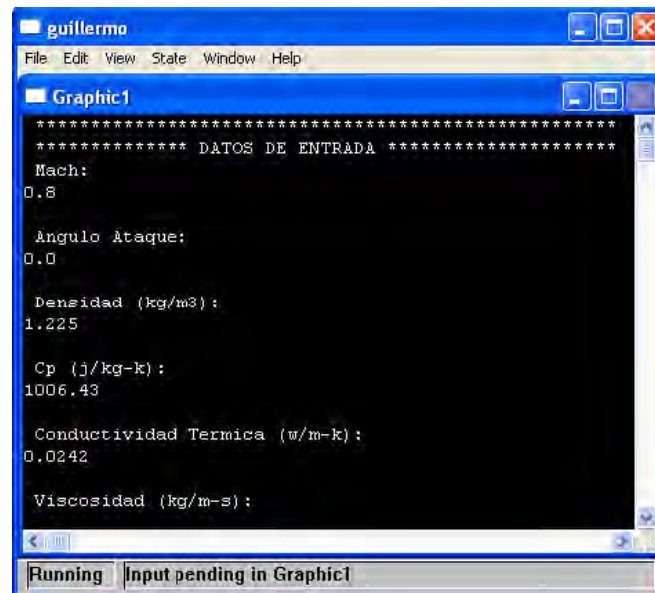


Fig. 6.13- Software THAYA - 10X.

El software THAYA - 10X fue utilizado para realizar estudios a diferentes números de mach (0, 0.2, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0, 1.4, 2.0) y diferentes ángulos de ataque (0, 1.25, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15), además se analizó el coeficiente de distribución de presión para dos casos en los cuales los ángulos de ataque fueron 1.49 y 1.25, con una velocidad de mach 0.7 y 0.8, para cada caso respectivamente.

6.9- Proceso

Las soluciones de las ecuaciones del sistema se obtienen a partir de un proceso iterativo, que en general requiere un elevado número de iteraciones para alcanzar la convergencia. Se puede asegurar que se ha alcanzado la convergencia cuando los cambios en las variables solución de una iteración y de la siguiente son insignificantes.

Para cada uno de los campos calculados u, v, P, T se aplicará el siguiente criterio de convergencia:

$$\frac{\phi(I) - \phi a(I)}{\phi_{\max} - \phi_{\min}} \leq FC \quad (6.41)$$

Donde :

$\phi(I)$: Campo calculado U, V, P, ó T

$\phi a(I)$: Campo calculado de la iteración anterior

ϕ_{\max} : Valor máximo del campo calculado.

ϕ_{\min} : Valor mínimo del campo calculado.

FC : Factor de convergencia

Si se cumple el criterio de convergencia, entonces los datos calculados son correctos numéricamente, el algoritmo concluye.

Este tipo de criterio de convergencia asegura que las iteraciones culminen aunque el rango de variación de los valores del campo a ser determinado sea grande.

6.10- Análisis De Los Resultados

Los análisis más exhaustivos que deben realizarse son los de velocidades, presiones, mach y los de temperatura ya que son éstos los que nos van a permitir compararlos con los datos experimentales y, por lo tanto, comprobar si estamos realizando correctamente la simulación. Veamos entonces, por separado, qué consideraciones deben tenerse en cuenta para el análisis de cada parámetro:

Análisis de velocidades:

El punto del borde de ataque donde el fluido incide tiene velocidad nula y se denomina punto de estancamiento.

En la zona del borde de ataque del perfil se puede ver claramente el punto de estancamiento o de velocidad nula. Alrededor de éste se observa la forma del campo de velocidades debida a la geometría del perfil. A medida que el flujo se aproxima al punto de estancamiento se ve afectado por el flujo que previamente ha chocado con la superficie del perfil y las líneas de isovelocidad quedan de la forma que se puede ver en la figura 6.14.

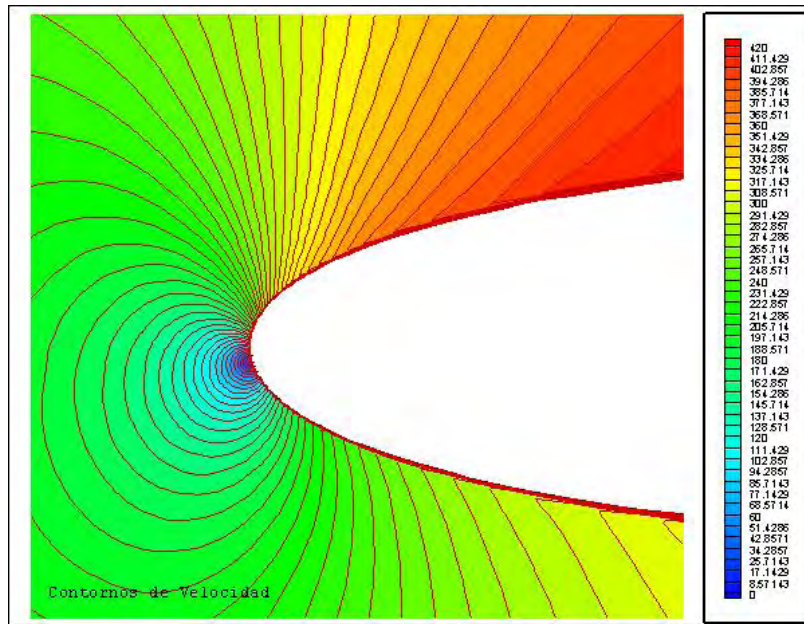


Fig. 6.14- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 4^0$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

A medida que aumentamos el ángulo de ataque, la diferencia de velocidades es más elevada, ya que el punto de estancamiento se desplaza ligeramente hacia la parte del intradós, dejando así, más longitud a recorrer por las líneas de corriente en la parte del extradós.

Se puede ver en las figuras siguientes (6.15 - 6.20) como el punto de estancamiento se desplaza a medida que aumentamos el ángulo de ataque.

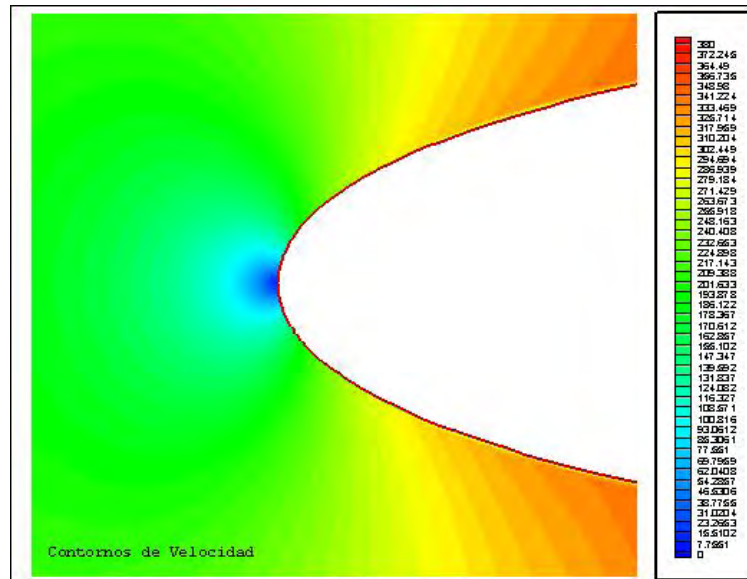


Fig. 6.15- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 0^0$	$Re_c=1.8259 \times 10^7$

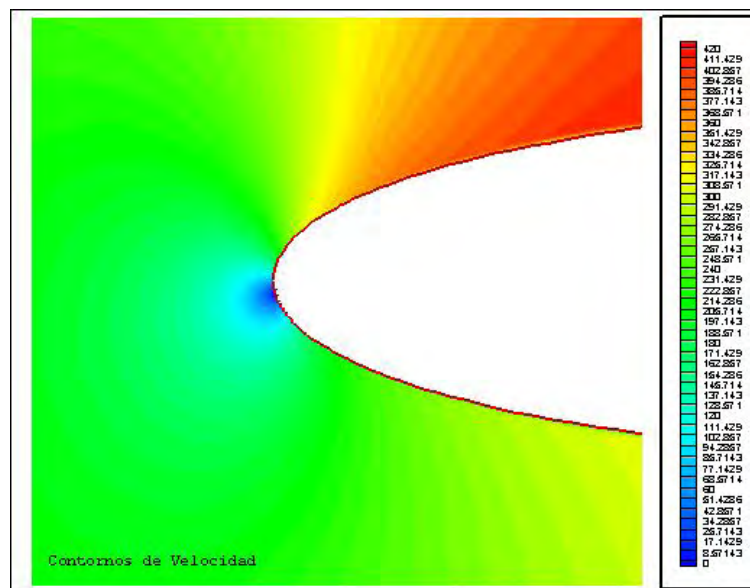


Fig. 6.16- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 4^0$	$Re_c=1.8259 \times 10^7$

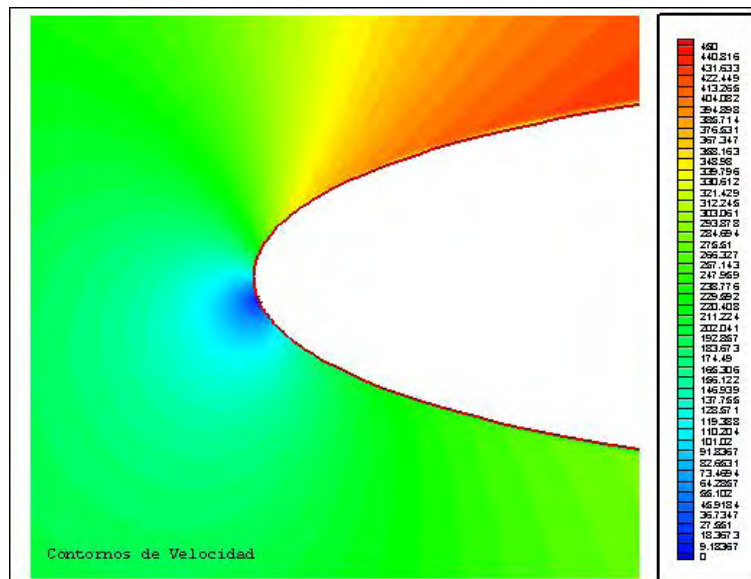


Fig. 6.17- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 6^0$	$Re_c=1.8259 \times 10^7$

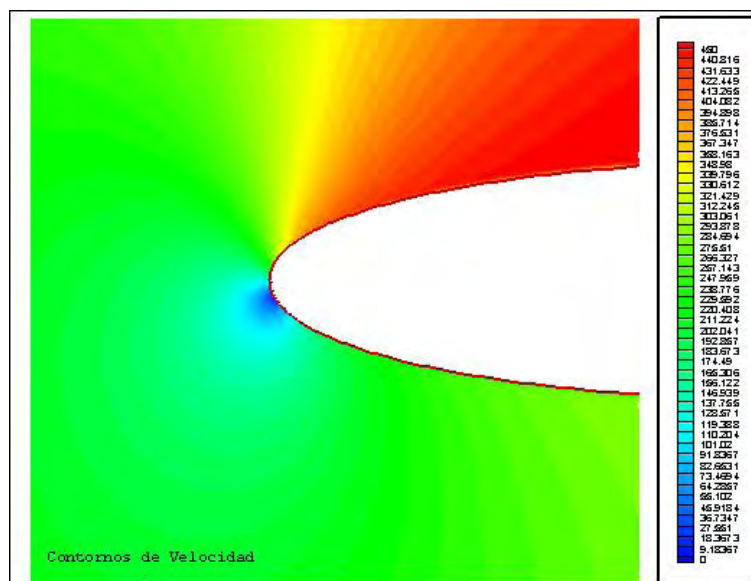


Fig. 6.18- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 8^0$	$Re_c=1.8259 \times 10^7$

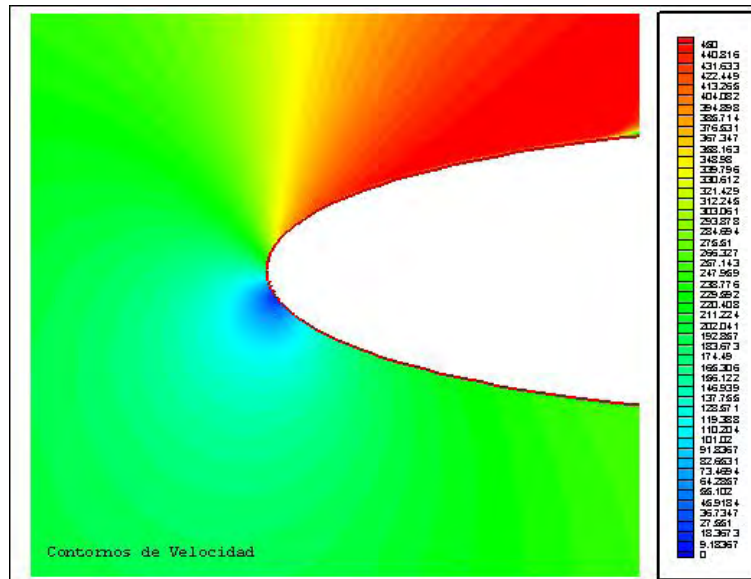


Fig. 6.19- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 10^0$	$Re_c=1.8259 \times 10^7$

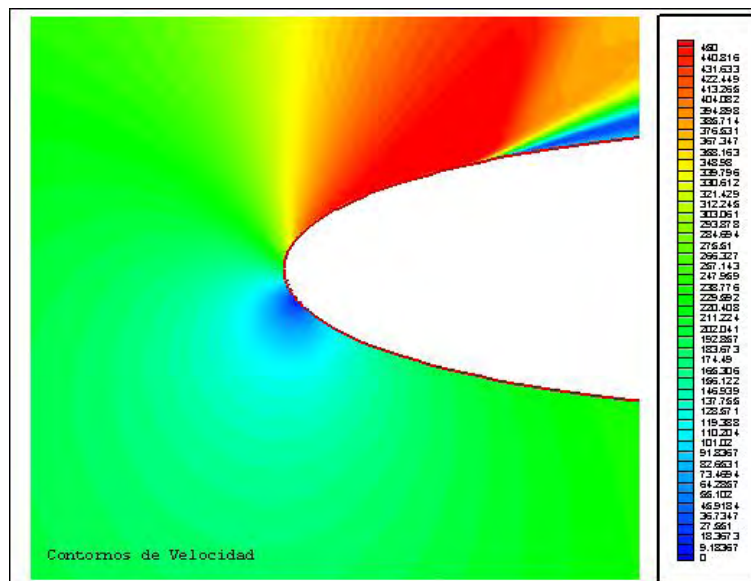


Fig. 6.20- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 12^0$	$Re_c=1.8259 \times 10^7$

A medida que las partículas de fluido se alejan de este punto, van adquiriendo más velocidad, alcanzando en un determinado punto la velocidad máxima.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de la función de corriente de un flujo plano sobre un cuerpo cerrado, se pueden determinar las relaciones que existen entre las velocidades máximas que el fluido puede alcanzar en la zona más cercana a la superficie del cuerpo y la velocidad de incidencia del fluido sobre el cuerpo sólido.

En concreto, veamos el óvalo de Rankine (Figura 6.21): si consideramos un óvalo y las ecuaciones de corriente del flujo alrededor del mismo, se puede determinar, entre otros parámetros, la velocidad máxima que una partícula, en la línea de flujo, adquiere en función de los parámetros geométricos del óvalo.

Debe decirse que la ecuación de Rankine sólo es válida para un modelo no viscoso, con lo que, en las zonas donde este modelo no es realista (zonas de gradientes de presión adverso), no es adecuado emplear la ecuación.

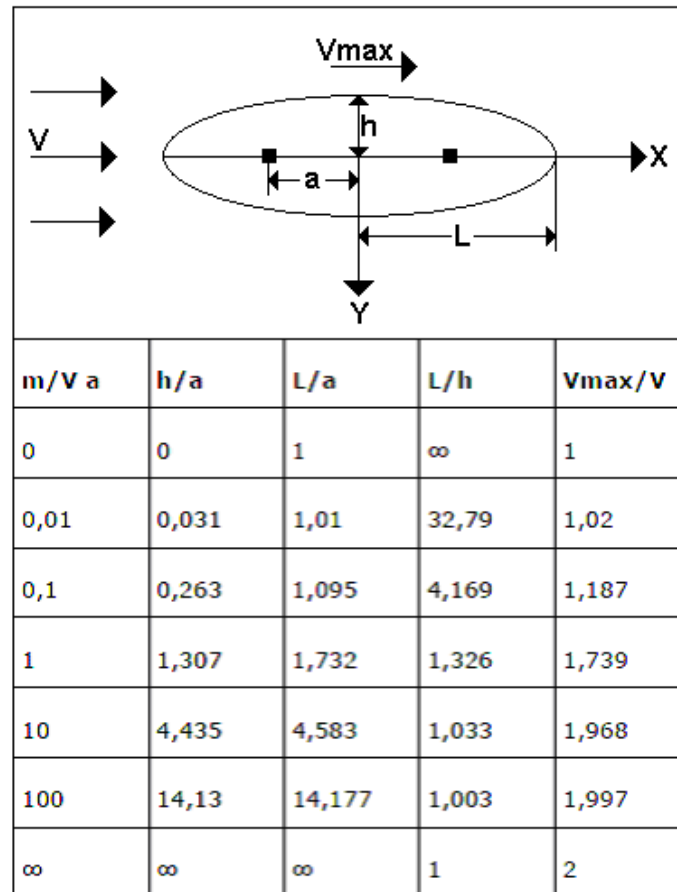


Fig. 6.21- Relación de parámetros geométricos - velocidades en el óvalo de Rankine. Fuente Frank M. White, Mecánica de Fluidos, Ed. McGraw-Gil, 1979.

A continuación vamos a analizar un perfil Naca 0012 con un ángulo de ataque $\alpha = 0^\circ$, Número de Mach de 0.15 y un Número de Reynolds $Re_c = 3.42 \times 10^6$ y obtendremos la velocidad máxima mediante las ecuaciones de la función de corriente de un flujo plano sobre un cuerpo cerrado.

El espesor del perfil NACA es de 12%, con lo que basándonos en la teoría del óvalo de Rankine, la relación L/h es 8.33. En este caso, para 0° de ángulo de ataque, la relación de velocidades en este perfil deberá estar alrededor del 1.09.

Esta relación de velocidades se obtuvo luego de utilizar el programa raiz_10X, el cual me determina la relación de velocidades luego de iteraciones sucesivas, la metodología empleada así como el código del programa creado se encuentra en el Anexo - B.

Observamos que esta relación es un poco superior en nuestro caso, pero debemos tener en cuenta que nuestro perfil no es exactamente un óvalo, con lo que la variación se considera aceptable.

En la figura se puede observar que la máxima velocidad que se obtuvo fue de 60 m/s, por lo cual la relación de velocidades obtenida mediante simulación numérica es de 1.20.

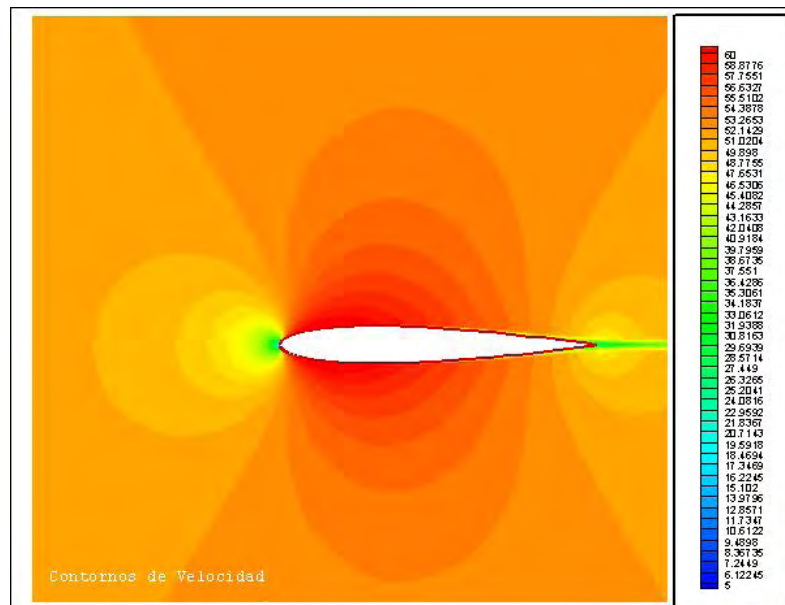


Fig. 6.22- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.15	$\alpha = 0^0$	$Re_c = 3.42 \times 10^6$

En la mayoría de perfiles el borde de salida es agudo, con lo que las velocidades de fluido en las superficies superior e inferior deben ser iguales al abandonar el perfil.

Debido a que el trayecto que debe recorrer el flujo en un perfil asimétrico es más elevado en la parte superior que en la inferior, la velocidad del flujo en la parte superior es más elevada

Podemos ver, en la figura 6.23, cómo la velocidad del flujo en la parte superior es más elevada.

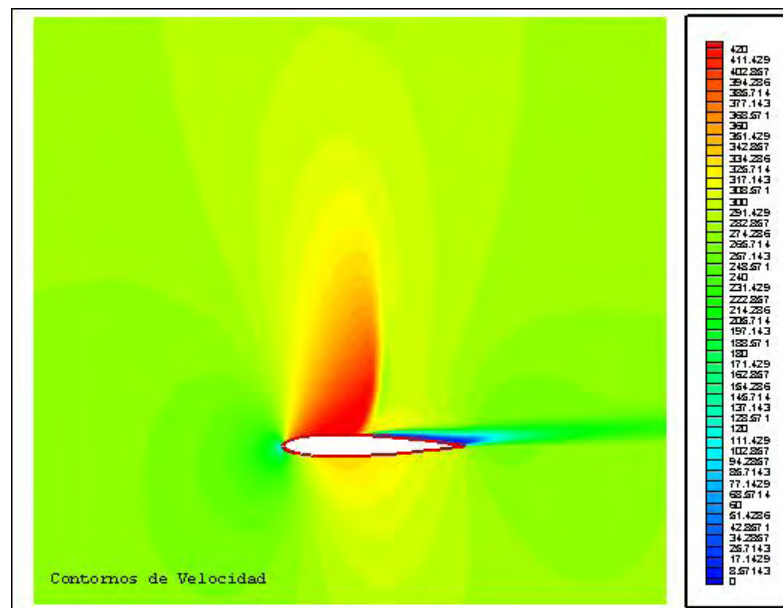


Fig. 6.23- Contornos de velocidad.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 4^0$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

La simulación fluidodinámica se ha realizado suponiendo que el perfil no tiene velocidad y el fluido choca contra él con una determinada velocidad libre, con lo que la velocidad a lo largo de toda la superficie del perfil es nula y por ello se puede observar, en la figura 6.24, una capa azul que rodea todo el perfil.

Además por pequeña que sea la viscosidad siempre existe una delgada región cerca de la pared donde la velocidad disminuye a cero. Por eso deberá observarse que cerca de la superficie del perfil, las velocidades son pequeñas. En la figura 6.24, se puede observar la afirmación anterior

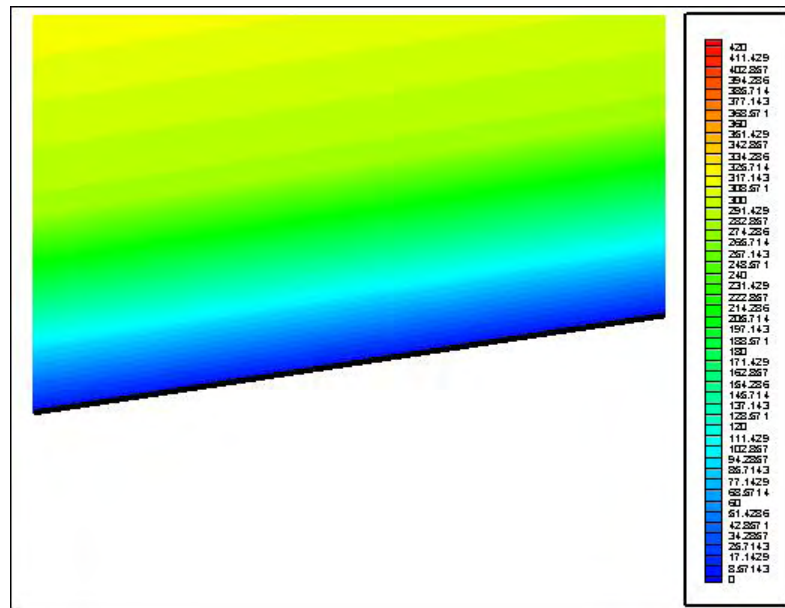


Fig. 6.24- Contornos de velocidad cerca a la pared.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 4^\circ$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

Análisis de presiones:

Tal como se ha comentado antes, el punto donde el fluido incide en el perfil es de velocidad nula (punto de estancamiento), con lo que la presión en ese punto es máxima (presión total de la corriente libre).

Se puede ver en las siguientes figuras (6.25 - 6.28) cómo el punto de estancamiento se desplaza a medida que aumentamos el ángulo de ataque.

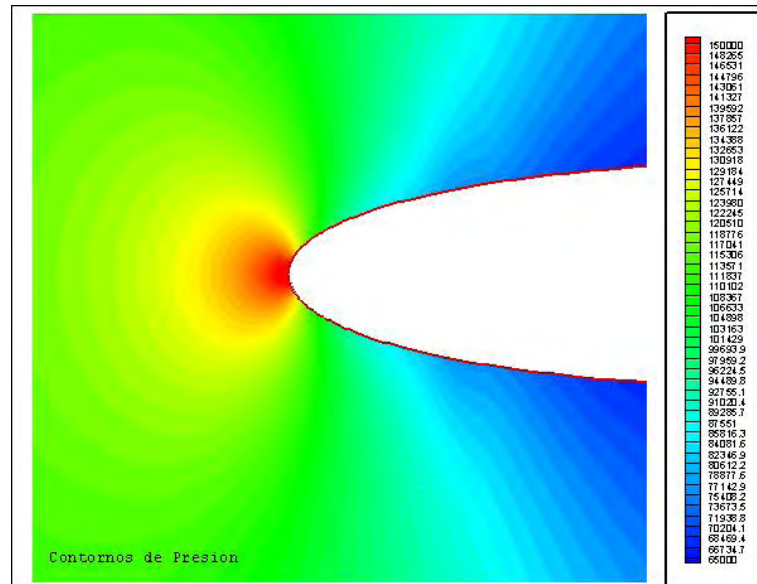


Fig. 6.25- Contornos de presión.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 0^0$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

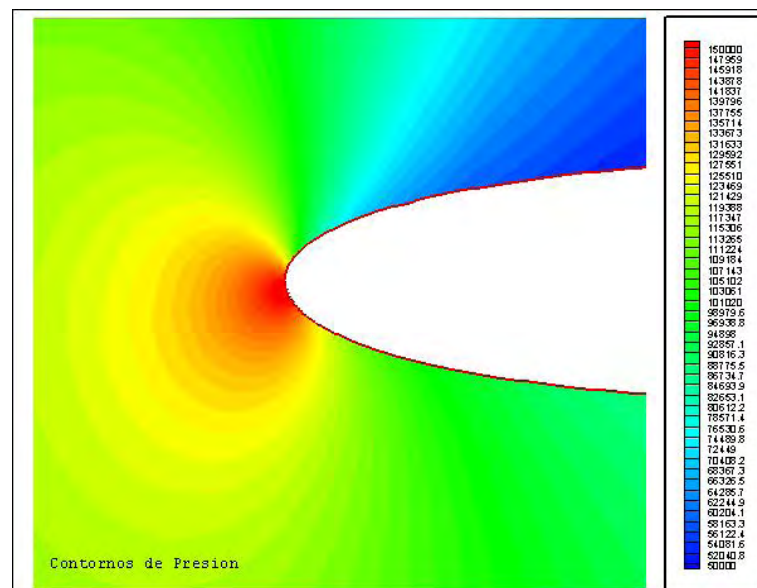


Fig. 6.26- Contornos de presión.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 4^0$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

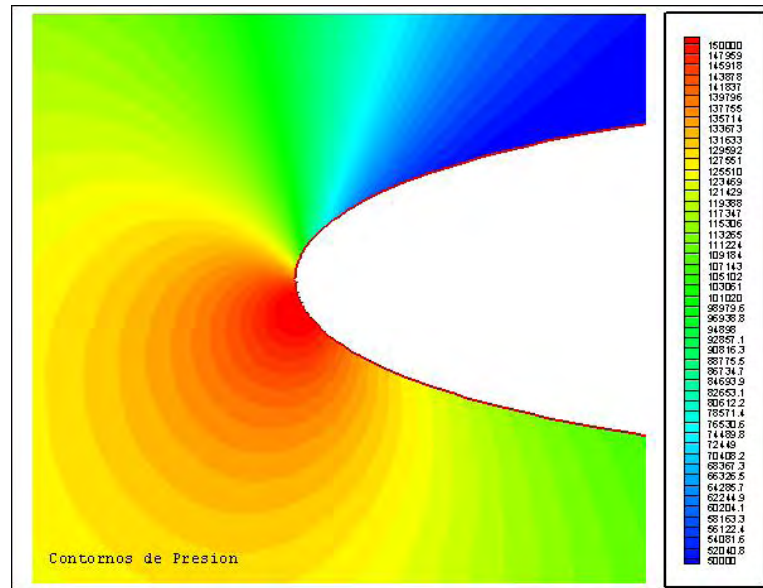


Fig. 6.27- Contornos de presión.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 8^0$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

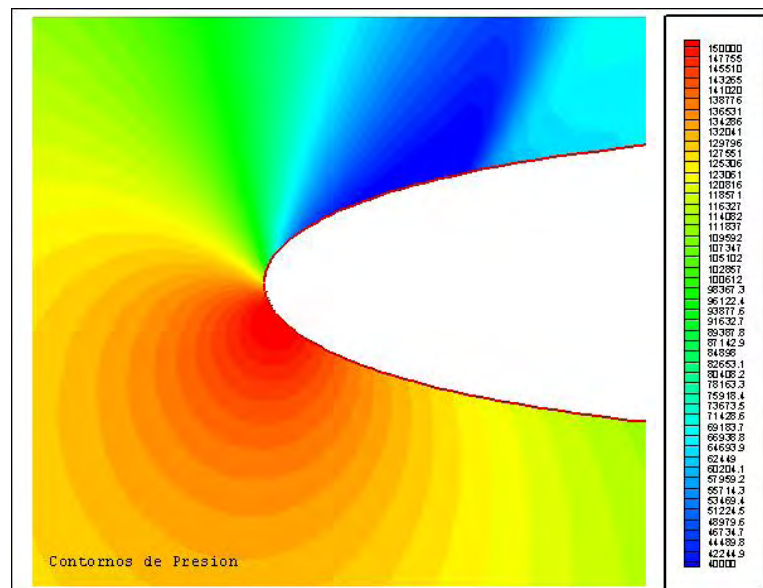


Fig. 6.28- Contornos de presión.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 12^0$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

Para analizar la coherencia del valor de presión máxima obtenido, aplicaremos la ecuación de Bernoulli (Ec. 6.42). Se considera una sola línea de corriente en un flujo estacionario e incompresible y se aplica a dos puntos de esta línea: un punto en la entrada y el otro en el punto donde se obtiene la presión máxima:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + Z_2 \quad (6.42)$$

Como: $Z_1 = Z_2 = 0$ (Altura de referencia)

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

Además se cumple que:

$$v_1 = 0 \quad P_1 = P_{\max} \quad (\text{Punto de estancamiento})$$

$$P_2 = P_{\infty}$$

Finalmente la ecuación de Bernoulli queda reducida a la siguiente expresión (Ec. 6.43);

$$P_1 = P_2 + \left(\frac{\rho}{2} \right) v_2^2 \quad (6.43)$$

Aunque rara vez las hipótesis en la ecuación de Bernoulli son estrictamente ciertas, con frecuencia son buenas aproximaciones: los flujos a velocidades no muy elevadas son casi incompresibles, los efectos viscosos son despreciables en flujos sin paredes que los confinen y en flujos fuera de las capas límites viscosas; como el campo de flujo varía lentamente, se puede modelar como cuasi-estacionario.

Con el valor de velocidad de entrada libre del fluido, debe comprobarse que el valor de presión máxima se acerca al valor resultante de aplicar esta fórmula.

También nos interesa mirar el campo de presiones para comprobar si cumple la ecuación de Bernoulli simplificada para nuestro caso (Ec. 6.43). En el caso particular que estamos estudiando los valores de la ecuación son los siguientes:

$$V_2 = V_\infty = 50 \text{ m/s}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$P_2 = P_\infty = 101325 \text{ Pa}$$

$$\rho = (1.225 \text{ Kg/m}^3)$$

Por tanto el valor de presión que debemos obtener es de $P_1 = 102856.25$ Pa, que es aproximadamente el obtenido en la simulación.

En la figura 6.29 se muestra la máxima presión ($P=102800$ Pa) que se obtuvo mediante simulación numérica

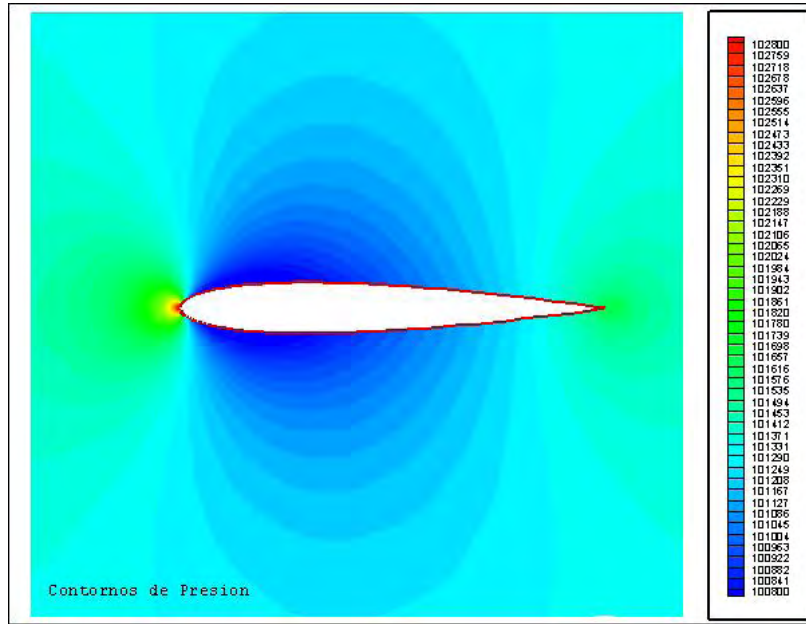


Fig. 6.29- Contornos de presión.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.15	$\alpha = 0^0$	$Re_c=3.42 \times 10^6$

Con estos datos vamos a proceder a calcular el error cometido por la simulación para comprobar que los pasos previos a la simulación, y la propia simulación, se han realizado correctamente.

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{P_A - P_{\max}}{P_A} \right) \cdot 100 = \left(\frac{102856.25 - 102800}{102856.25} \right) \cdot 100 = 0.055\%$$

Con este error podemos decir que todos los pasos de la simulación se han realizado correctamente. Sabemos que existe la posibilidad de ajustar más los resultados pero consideramos que el gasto en tiempo para la obtención de una malla más eficaz no va a compensar las mejoras.

Análisis de número de Mach

Los análisis que se realizaron para determinar la distribución de contornos del número de mach fueron de manera cualitativa, para este fin se compararon los estudios realizados por la NACA (Figura 6.30) con los obtenidos mediante simulación numérica (figuras 6.31 - 6.35)

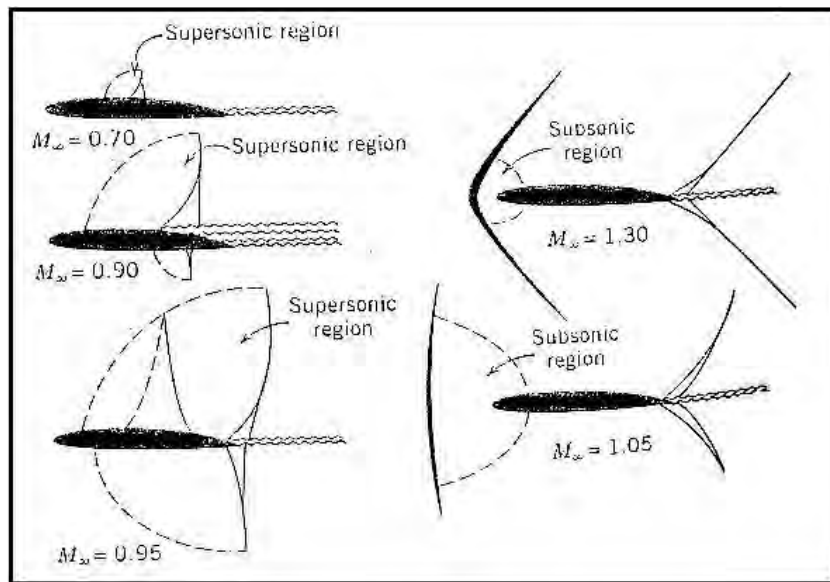


Fig. 6.30- Flujo alrededor de un perfil transónico. Fuente Arnold M. Kuethe, Chuen-Yen Chow, Foundations of Aerodynamics, Ed. J. Wiley, 1998.

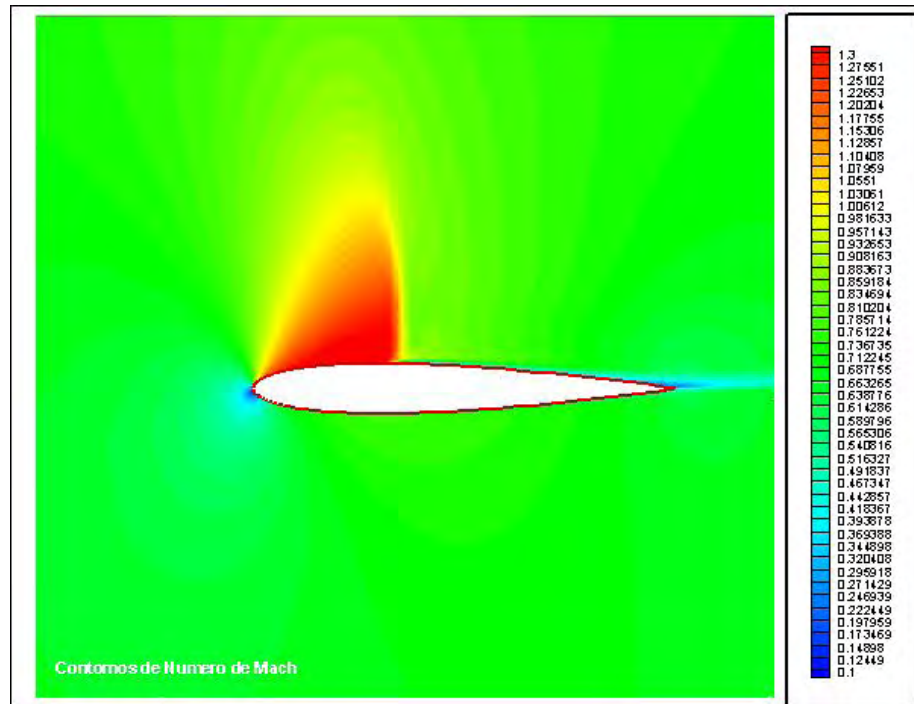


Fig. 6.31- Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 0.70

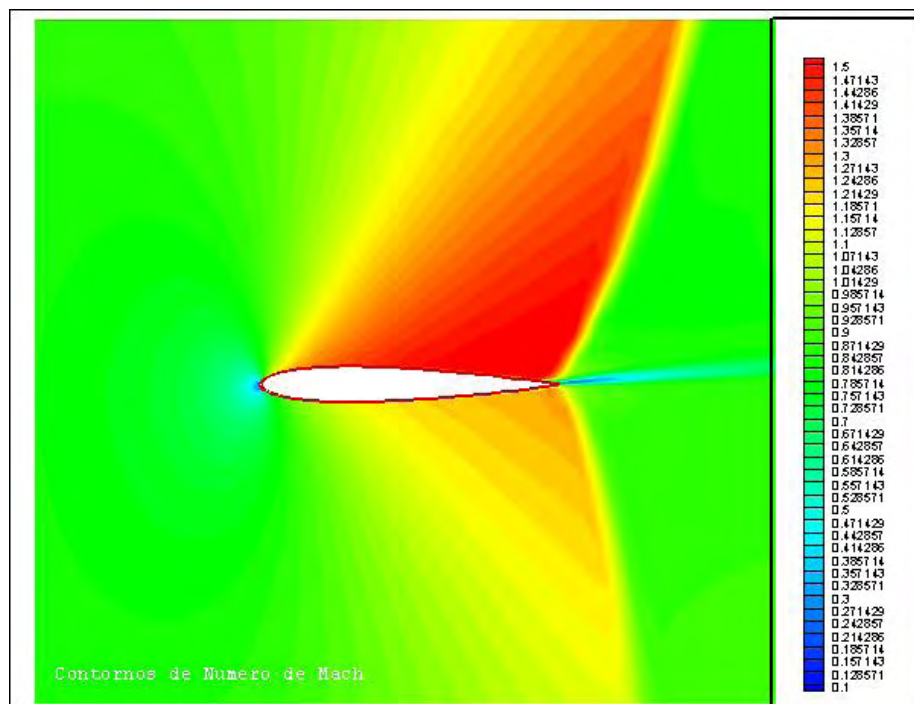


Fig. 6.32- Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 0.90

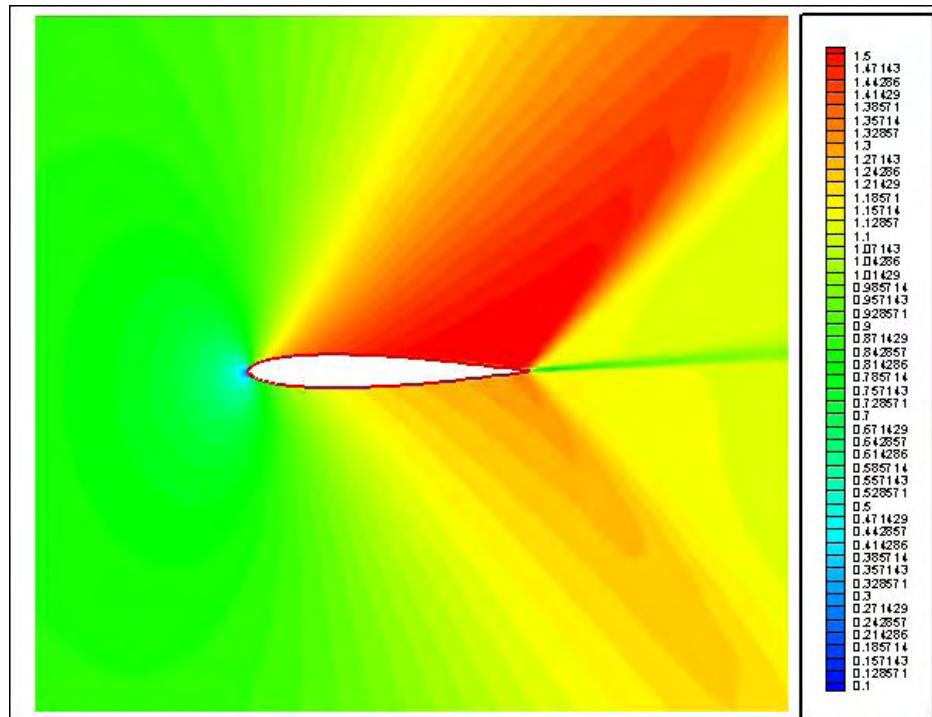


Fig. 6.33- Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 0.95

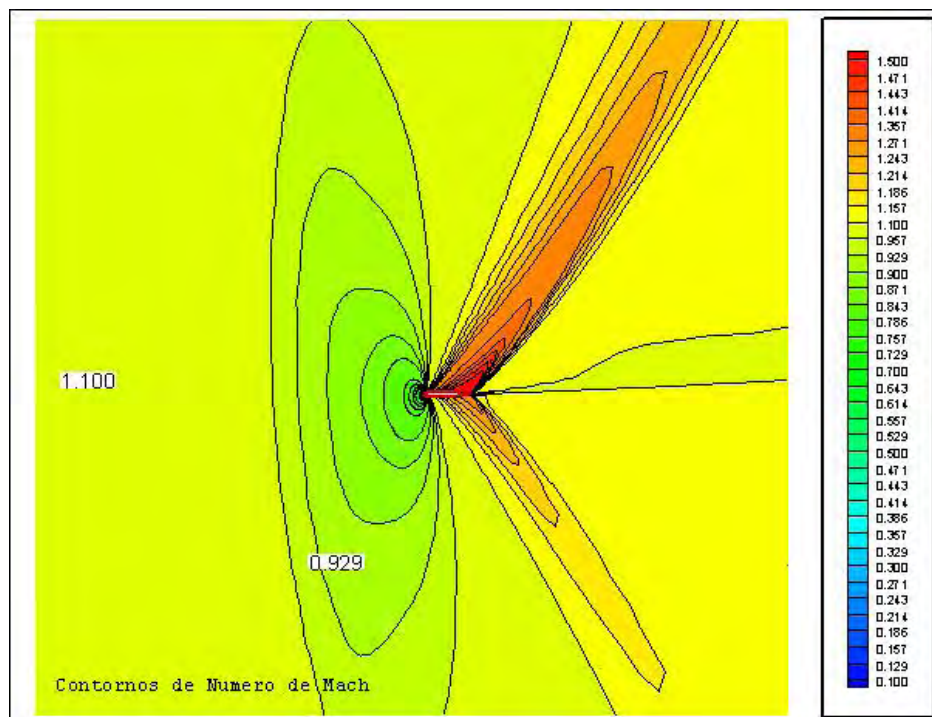


Fig. 6.34- Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 1.05

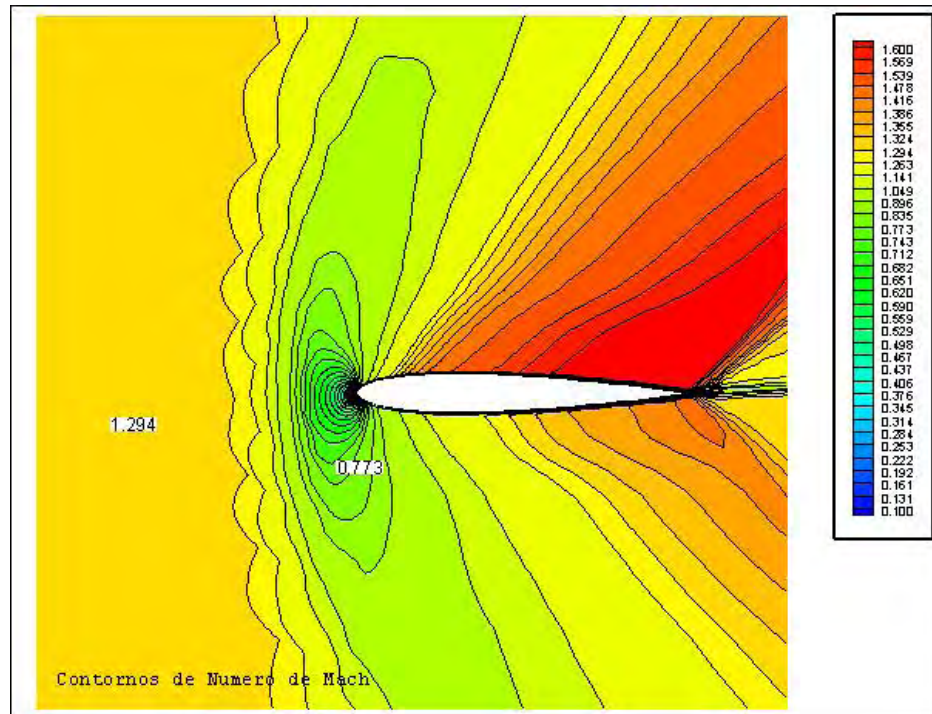


Fig. 6.35- Flujo alrededor de un perfil transónico a Mach 1.30

Las figuras (6.31 - 6.35) nos dan a conocer que los resultados obtenidos mediante la simulación numérica demuestran una buena aproximación en relación a los obtenidos por la NACA.

Análisis de temperatura

La temperatura de la superficie del perfil a bajas velocidades de vuelo $M_\infty < 1$ se puede considerar igual a la temperatura del flujo de aire libre, el error que se comete es despreciable.

A altas velocidades de vuelo debido al estancamiento del flujo dentro de la capa límite aumenta considerablemente la temperatura del aire.

A una distancia cero de la pared metálica ésta sigue la siguiente ley:

$$T = T_{\infty} [1 + r (k-1)/2] \mathbf{M}_{\infty}^2 \quad (6.44)$$

Donde, r es el coeficiente de recuperación y esta definido por la siguiente fórmula:

$$r = (T_r - T_{\delta}) / (T_0 - T_{\delta}) \quad (6.45)$$

el valor de r depende del número de Prandtl el cual esta determinado por la siguiente relación:

$$\mathbf{Pr} = \mu C_p / \lambda, \quad (6.46)$$

para el aire se considera $\mathbf{Pr} = 0,72$ y $k = 1,4$

En la capa límite laminar $r = (\mathbf{Pr})^{1/2}$ y en la turbulenta $r = (\mathbf{Pr})^{1/3}$

$$T_r = T_{\infty} [1 + 0,17 \mathbf{M}_{\infty}^2] \text{ - capa límite laminar} \quad (6.47)$$

$$T_r = T_{\infty} [1 + 0,18 \mathbf{M}_{\infty}^2] \text{ - capa límite turbulenta} \quad (6.48)$$

Debido a las implicancias de calcular la distancia de la capa límite laminar y turbulenta vamos a optar por calcular una temperatura promedio.

$$T_{\infty} [1 + 0,17 \mathbf{M}_{\infty}^2] < T_p < T_{\infty} [1 + 0,18 \mathbf{M}_{\infty}^2] \quad (6.49)$$

A continuación vamos a obtener la temperatura en el perfil utilizando la ecuación 6.49. Los valores que obtengamos serán comparados con los valores obtenidos mediante la simulación numérica.

Para realizar la comparación entre estos dos métodos utilizaremos dos casos:

1-Cálculo de la temperatura en un perfil Naca 0012 con $M = 0.8$

$$T_r = T_{\infty} [1 + 0,17M_{\infty}^2] \text{ - capa límite laminar}$$

$$T_r = 300 [1 + 0,17*0.8^2] = 332.64 \text{ }^{\circ}\text{k}$$

$$T_r = T_{\infty} [1 + 0,18M_{\infty}^2] \text{ - capa límite turbulenta}$$

$$T_r = 300 [1 + 0,18*0.8^2] = 334.56 \text{ }^{\circ}\text{k}$$

$$T_{\infty} [1 + 0,17M_{\infty}^2] < T_p < T_{\infty} [1 + 0,18M_{\infty}^2]$$

$$332.64 \text{ }^{\circ}\text{k} < T_p < 334.56 \text{ }^{\circ}\text{k}$$

Las figuras 6.36 y 6.37 muestran que los valores obtenidos mediante simulación numérica están dentro del rango obtenido por el cálculo analítico.

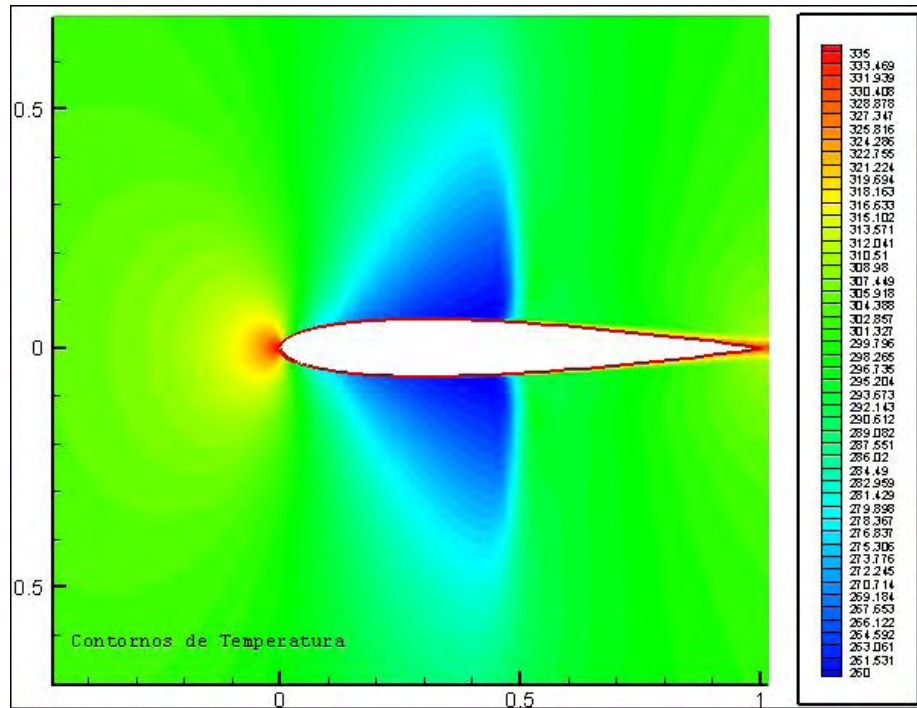


Fig. 6.36-Contornos de temperatura en un perfil a Mach 0.8

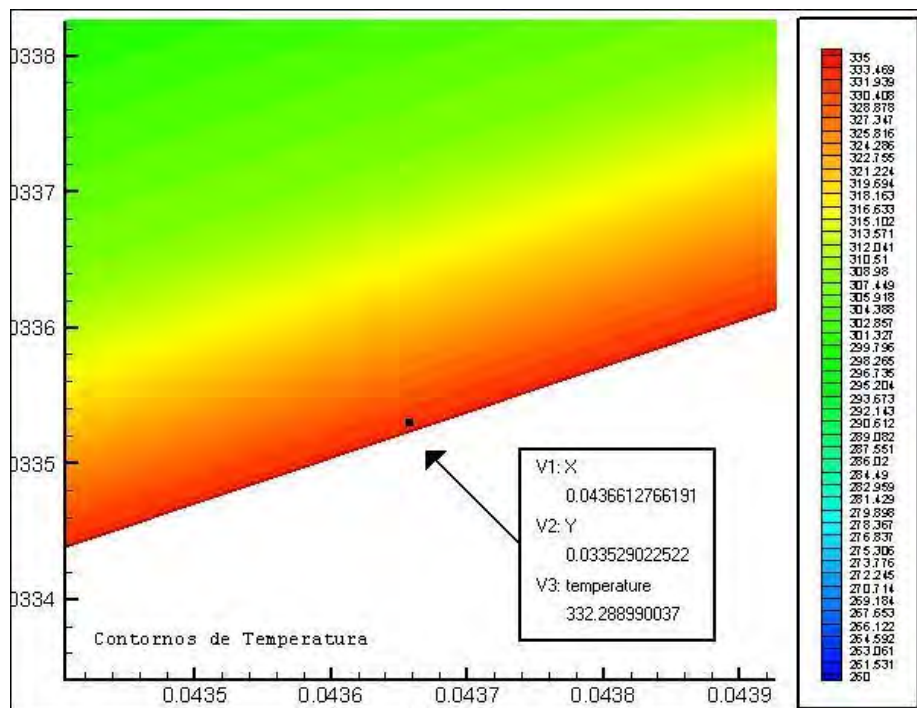


Fig. 6.37- Ubicación de la temperatura en el perfil. $(x,y,t)=(0.0437, 0.0335, 332.2890)$

2-Cálculo de la temperatura en un perfil Naca 0012 con una velocidad de $M = 1.8$

$$T_r = T_{\infty} [1 + 0,17M_{\infty}^2] \text{ - capa límite laminar}$$

$$T_r = 300 [1 + 0,17 \cdot 1.8^2] = 465.24 \text{ }^{\circ}\text{k}$$

$$T_r = T_{\infty} [1 + 0,18M_{\infty}^2] \text{ - capa límite turbulenta}$$

$$T_r = 300 [1 + 0,18 \cdot 1.8^2] = 474.96 \text{ }^{\circ}\text{k}$$

$$T_{\infty} [1 + 0,17M_{\infty}^2] < T_p < T_{\infty} [1 + 0,18M_{\infty}^2]$$

$$465.24 \text{ }^{\circ}\text{k} < T_p < 474.96 \text{ }^{\circ}\text{k}$$

Las figuras 6.38 y 6.39 muestran que los valores obtenidos mediante simulación numérica están dentro del rango obtenido por el cálculo analítico.

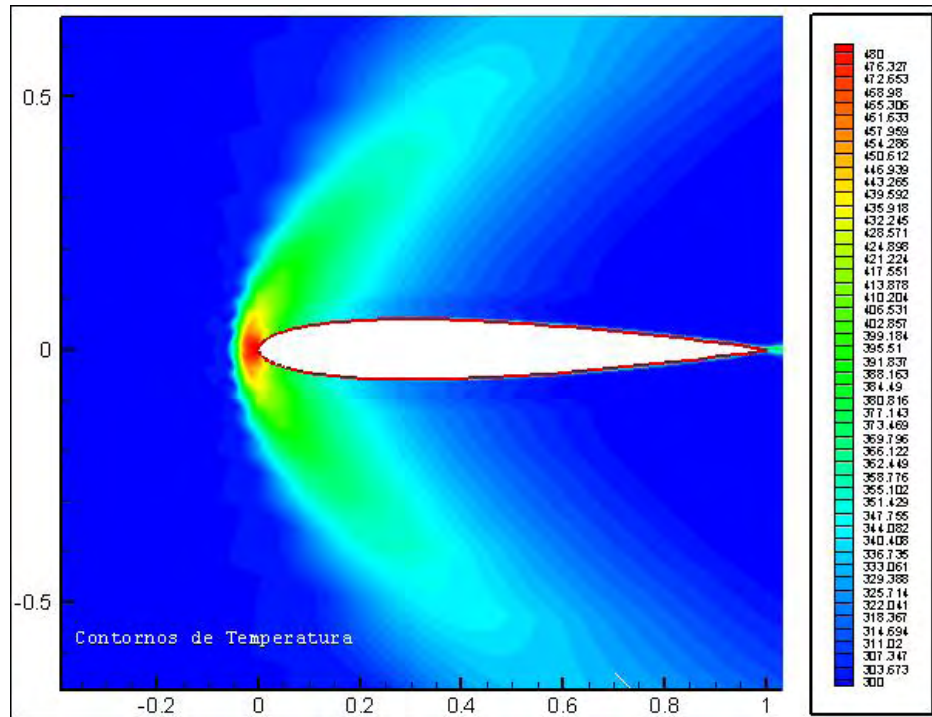


Fig. 6.38- Contornos de temperatura en un perfil a Mach 1.8

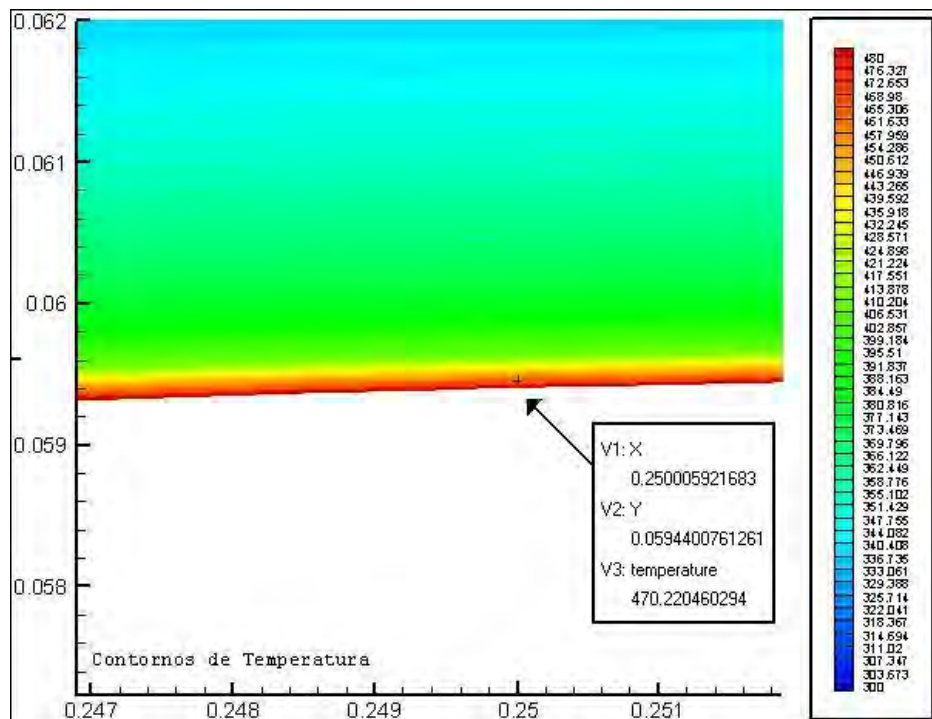


Fig. 6.39- Ubicación de la temperatura en el perfil $(x,y,t)=(0.2500, 0.0594, 470.2205)$

Otros Análisis

En esta sección se compara los valores obtenidos mediante el software THAYA - 10X con los estudios realizados por NASA Langley Research Center y por el departamento de física de la universidad nacional Dnepropetrovsk de Ucrania.

Fueron dos casos comparativos que mostraron la eficacia de nuestros datos obtenidos.

Caso a- Cálculo de C_p . Vs. x/c .

Kyle Anderson de NASA Langley Research Center presentó en su informe técnico (Grid Generation and Flow Solution Method for Euler Equations on Unstructured Grids) diversos cálculos para un perfil Naca 0012 de todos esos cálculos se extrajo el cálculo de C_p . Vs. x/c a las condiciones de Mach 0.80 y ángulo de ataque de cero grados.

Las figuras 6.40 y 6.41 muestran los datos obtenidos por W. Kyle Anderson y por el programa creado THAYA - 10X respectivamente.

Además del calculo del C_p también se realizó el calculo del coeficiente de sustentación (C_l). Para un ángulo de ataque de 0.1 Rad. se obtuvo el valor de 0.6083285, comparando este resultado con el valor experimental (0.63) se cometió un error de 3.44% , error que considero aceptable.

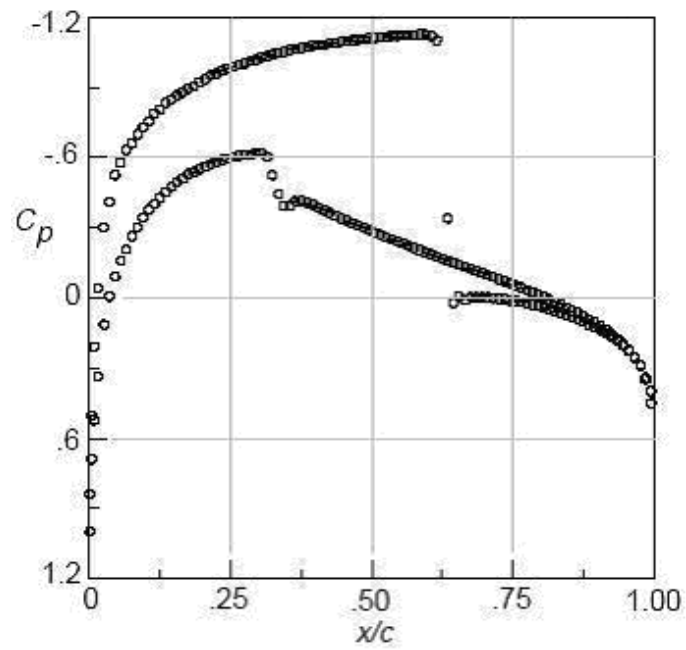


Fig. 6.40- Variación del coeficiente de presión obtenido por W. Kyle Anderson.

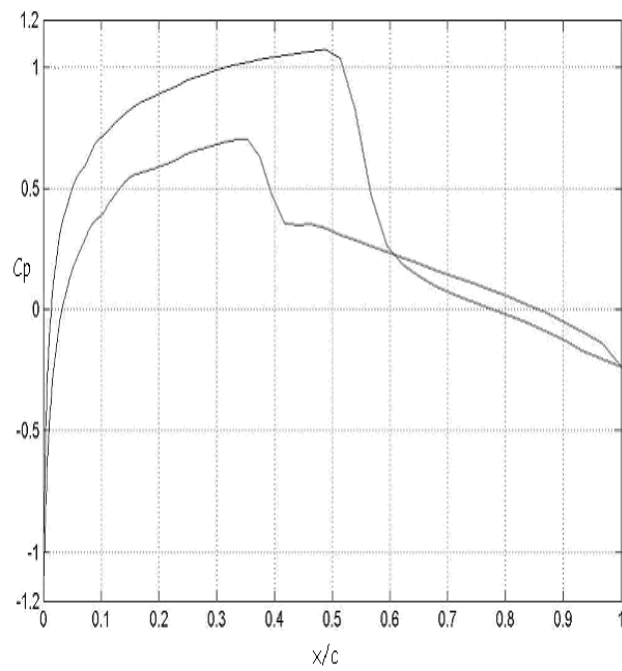


Fig. 6.41- Variación del coeficiente de presión obtenido mediante el software THAYA-10X.

Henry E. Jones de NASA Langley Research Center presentó en su informe técnico (Full-Potential Modeling of Blade-Vortex Interactions) diversos cálculos para un perfil Naca 0012 de todos esos cálculos se extrajo el cálculo de C_p . Vs. x/c a las condiciones de Mach 0.80 y ángulo de ataque de 1.25 grados.

Las figuras 6.42 y 6.43 muestran los datos obtenidos por Henry E. Jones y por el programa creado THAYA - 10X respectivamente.

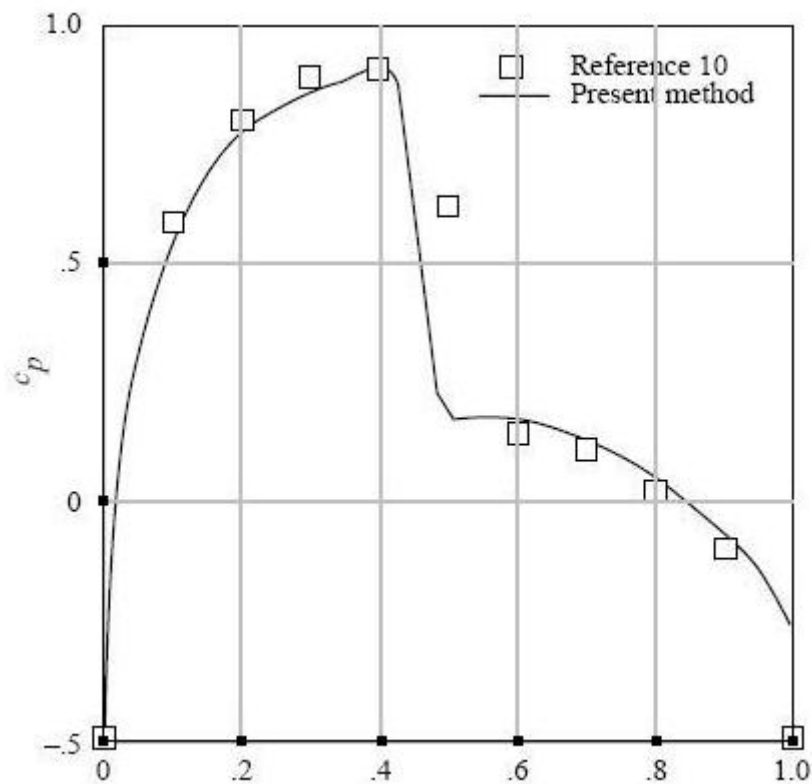


Fig. 6.42- Variación del coeficiente de presión obtenido por Henry E. Jones.

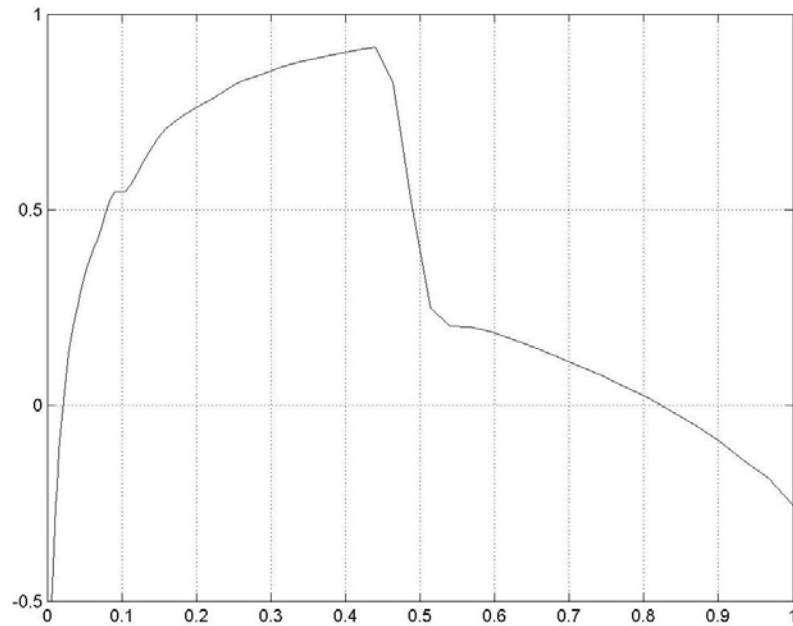


Fig. 6.43- Variación del coeficiente de presión obtenido mediante el software THAYA-10X.

Caso b- Contorno de presión y temperaturas.

Para comparar nuestros datos obtenidos mediante el software THAYA - 10X se tomó como referencia el estudio realizado por el Ph.D Pavel I. Kudinov, profesor asociado de la universidad de Ucrania.

Las figuras 6.44 y 6.45 muestran los contornos de número de Mach obtenidos por el Ph.D Pavel I. Kudinov y por el software THAYA – 10X respectivamente.

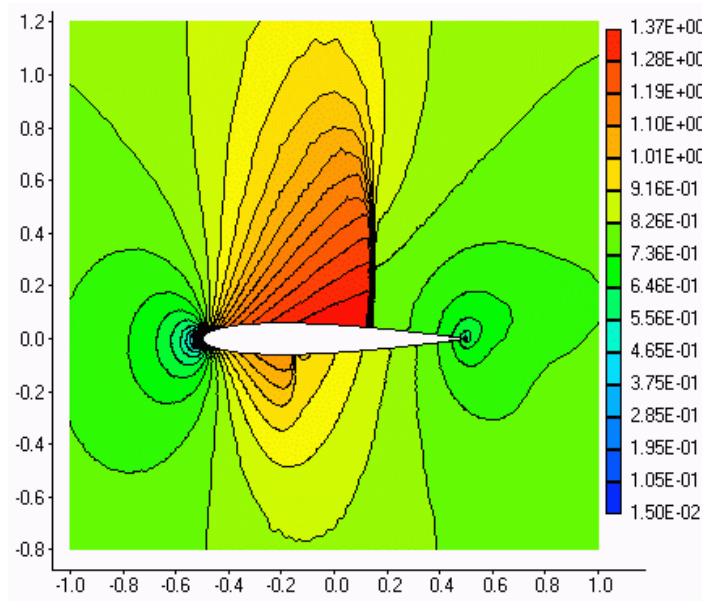


Fig. 6.44- Contornos de número de Mach.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 1.25^\circ$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

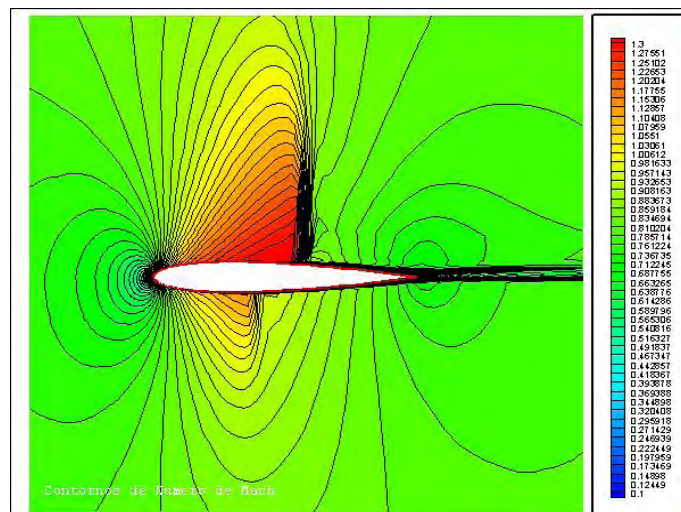


Fig. 6.45- Contornos de número de Mach obtenidos mediante el software THAYA – 10X.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 1.25^\circ$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

Las figuras 6.46 y 6.47 muestran los contornos de presión obtenidos por el Ph.D Pavel I. Kudinov y por el software THAYA – 10X respectivamente.

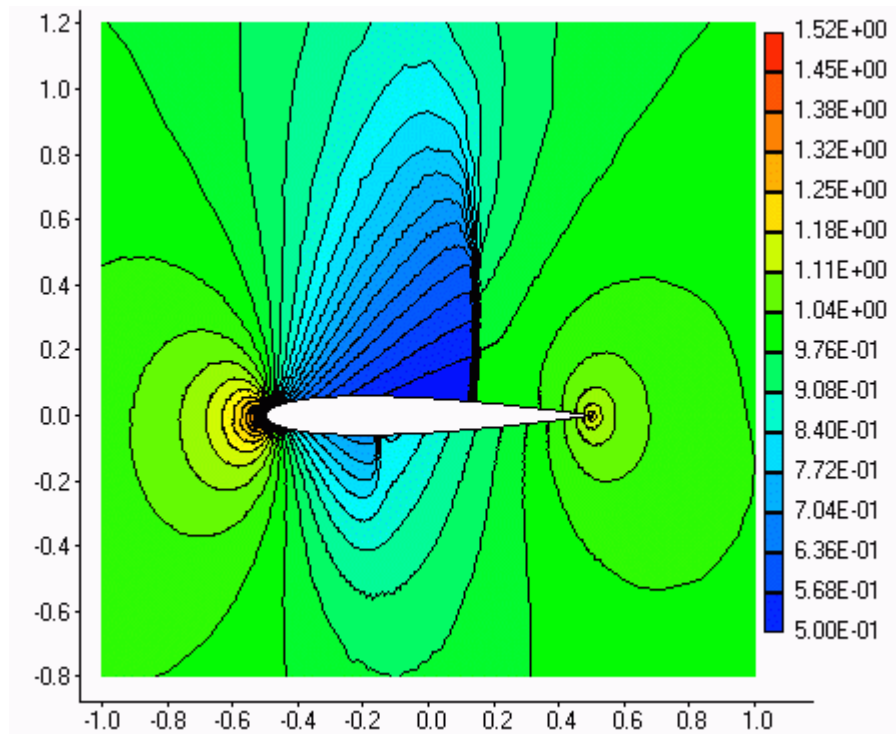


Fig. 6.46- Contornos de presión.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 1.25^\circ$	$Re_c = 1.8259 \times 10^7$

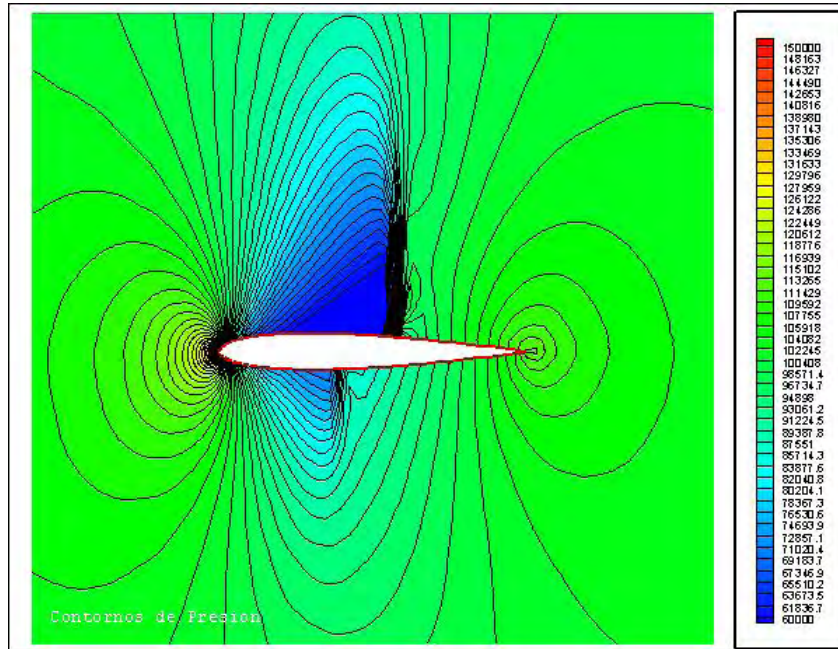


Fig. 6.47- Contornos de presión obtenidos mediante el software THAYA

– 10X.

Número de Mach	Ángulo de Ataque	Número de Reynolds
M=0.8	$\alpha = 1.25^0$	$Re_c=1.8259 \times 10^7$

CAPITULO VII

VII- CONCLUSIONES

Los objetivos para este trabajo pueden ser considerados alcanzados. El estudio y entendimiento del método fue efectuado con éxito y la implementación computacional generó tres programas que están totalmente operativos y aptos. Si bien estos programas todavía no se encuentran aptos para ser usados como un software comercial la continuidad de este trabajo por otro tesista hará que esto sea posible.

Con respecto a los resultados obtenidos en las pruebas efectuadas, éstas mostraron que el método es extremadamente poderoso. Se realizaron diferentes comparaciones tanto analíticas, experimentales como numéricas a lo largo de la tesis.

En el capítulo tres se analizó la conducción de calor en estado estable y transitorio, en una y dos dimensiones espaciales. Para obtener la distribución de temperatura se utilizó la técnica de Volúmenes Finitos, los datos producto de la solución numérica se compararon con los datos producto de la solución analítica y los datos obtenidos mediante el software comercial Femlab.

Los resultados obtenidos mediante el método de los volúmenes finitos se encuentran muy próximos a los obtenidos mediante la solución analítica y mediante el software Femlab. El inconveniente es que no se pudo realizar una comparación con valores experimentales.

En el capítulo seis se analizó y se calculó los más importantes parámetros de esta tesis; con el software creado se obtuvo los contornos de velocidad, presión, temperatura, número de mach y la relación de C_p Vs. x/c .

Los diversos valores que se obtuvieron para la temperatura, mach, presión y velocidad se compararon con valores numéricos y/o analíticos. El cálculo del C_p Vs. x/c se comparó con datos experimentales.

Para comprobar que el contorno de velocidades que se obtuvo representa correctamente el fenómeno analizado, se tomaron valores puntuales de este contorno y se compararon con los datos obtenidos producto de la aproximación de un perfil Naca 0012 mediante un ovalo de Rankine, estos resultados fueron ligeramente diferentes pero debemos de tener en cuenta que nuestro perfil no es exactamente un ovalo, con lo que la variación se considera aceptable.

El contorno de presiones se comparo con algunos valores puntuales que se obtuvo mediante la ecuación de Bernoulli. Además el contorno de presiones obtenido fue comparado con el obtenido numéricamente por el profesor asociado de la universidad de Ucrania Ph.D Pavel I. Kudinov, demostrando con este último que los valores obtenidos son los correctos.

Para el caso de la temperatura se tomaron valores puntuales del contorno de temperatura y se compararon con los valores obtenidos mediante la formula experimental presentada por N. C. Arzhanikov [2], esta comparación demostró que los valores obtenidos son admisibles para el fin que se busca.

Así como el contorno de presiones se comparo con el obtenido por el Ph.D Pavel I. Kudinov del mismo modo se realizo para el contorno del número de Mach, resultando nuevamente aceptable. Además se realizo una comparación cualitativa que fue presentada por Chuen Yen Chow [8], confirmando que los resultados obtenidos representan cualitativamente la descripción del fenómeno.

Los valores obtenidos mediante el software creado (contornos de velocidad, presión, número de mach y temperatura) se contrasto con los valores asintóticos previstos en la mecánica de los fluidos confirmando los resultados.

También se realizo el cálculo del C_p . Vs. x/c a las condiciones de Mach 0.80 y ángulo de ataque de 0 y 1.25 grados. Para un ángulo de ataque de 0 grados se comparo con los valores obtenidos por W. Kyle Anderson y para el ángulo de ataque de 1.25 se comparo con Henry E. Jones, ambos investigadores de NASA Langley Research Center, si bien los resultados mostraron un margen de error, este error se considera aceptable.

Con respecto a la convergencia y estabilidad se trato el acoplamiento Presión – Velocidad de forma eficaz y con relativa facilidad.

Para obtener mejores resultados se recomienda utilizar una malla más refinada. También se recomienda ajustes de orden numérico incluso sabiendo del costo computacional que puede generar.

Además podemos llamar la atención para pequeñas imprecisiones en la región del borde de fuga local donde alteraciones sutiles provocan grandes desvíos numéricos.

Finalmente si se quiere conseguir resultados mas realistas se tendría que resolver las ecuaciones que gobiernan un flujo compresible a fin de obtener una simulación bidimensional más completa, y todavía extender ésta para tres dimensiones, así como perfeccionar la malla e implementar un modelo de turbulencia.

7.1- Recomendaciones Para Trabajos Futuros

Algunas recomendaciones para trabajos futuros fueron hechas a lo largo del texto, sin embargo es interesante que éstas sean en este momento reunidas y mejor presentadas. A continuación mostramos algunas recomendaciones:

Desarrollar un modelo numérico que permita analizar flujos de fluidos viscosos incompresibles o compresibles en régimen subsónico, transónico y supersónico.

Extender el problema a tres dimensiones.

Implementar diferentes modelos de Turbulencia.

Transformar los programas para que cumplan las siguientes cualidades más importantes:

- a) Creación de una interfaz gráfica, entrada de datos interactivos y rutinas de pre y post procesamiento.

b) Ejecutar en cualquier plataforma y sistema operativo sin necesidad de ser recompiladas y con la máxima transparencia y compatibilidad.

c) Presentar un comportamiento robusto en pre – proceso, proceso y post proceso.

d) Revisión de los datos de entrada del problema así como gestión de avisos o mensajes de error.

e) Base de datos integrada totalmente personalizable por el usuario de propiedades de materiales de gases y líquidos

f) Refinado automático del mallado

g) Controles locales de mallado para optimizar la malla.

h) Acceso total a parámetros relacionados con la geometría y el mallado.

i) Ventana de Control del Análisis: ofrece información dinámica sobre la progresión de la solución, objetivos de convergencia mediante gráficas, así como la evolución de los resultados, mallado, etc.

Recomendamos que se realicen pruebas experimentales para validar el modelo numérico.

De hecho todas las recomendaciones citadas anteriormente muestran un desafío, pero el interés y la búsqueda por el perfeccionamiento harán que este objetivo sea alcanzado.

CAPITULO VIII

VIII- BIBLIOGRAFÍA

- [1]- Abbott, I. y Von Doenhoff, A. 1959. Theory of wing sections. New York, Dover. 693p.
- [2]- Arzhanikov, N. C. 1983. Aerodinámica de aeronaves. Moscú, Buishaya Shkola. pp. 262-273
- [3]- Becker, E. B. y Carey, G. F. 1981. Finite elements. New Jersey, Prentice Hall. pp. 1-33.
- [4]- Bottin, B. y Schröder, W. 1997. Calibration and application of a flexible wall adaptation technique on a naca0012 airfoil. [en línea]
<<http://www.vki.ac.be/research/publi/rp/rp1997/rp199721.pdf>> [consulta: 2 diciembre 2005].
- [5]- Bousman, W. 2000. Evaluation of airfoil dynamic stall characteristics for maneuverability. [en línea]
<http://halfdome.arc.nasa.gov/publications/files/Bousman_ERF00.pdf>
[consulta: 10 marzo 2006].
- [6]- Burden, R. L. y Faires, J. D. 2002. Análisis numérico. 7ªed. México, Thomson Learning. 839p.
- [7]- Chapra, S. C. y Canale, R. P. 1999. Métodos numéricos para ingenieros. 3ªed. México, McGraw Hill. 975p.
- [8]- Chow, Y. C. 1979. An introduction to computational fluid mechanics. New York, John Wiley & Sons. 396p.
- [9]- Chow, Y. C. y Kuethé, A. M. 1998. Foundations of aerodynamics. 5ªed. New York, John Wiley & Sons. 572p.
- [10]- Clovis, R. M. 1995. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. Rio de Janeiro, LTC. 424p.

- [11]- Fenves, S. J. 1969. Métodos de computación en ingeniería civil. México, Limusa. pp. 9-49.
- [12]- Feynman, R. y Leighton, R. B. 1987. Electromagnetismo y materia. México, Addison Wesley Iberoamericana. pp. 640-760.
- [13]- Feynman, R. y Leighton, R. B. 1987. Mecánica, radiación y calor. México, Addison Wesley Iberoamericana. 718p.
- [14]- Fortuna. A. 2000. Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos. São Paulo, Edusp. 426p.
- [15]- Fox, R. W. y McDonald, A. T. 1995. Introducción a la mecánica de fluidos. 2ªed. México, McGraw Hill. 915p.
- [16]- García, F. 1999. Lenguaje de programación Fortran 90. México, Paraninfo. 277p.
- [17]- Hinchey, F. A. 1979. Vectores y tensores. México, Limusa. 334p.
- [18]- Hoffmann, K. A. y Chiang, S. T. 1995. Computational fluid dynamics for engineers. Kansas, Engineering Education System. 451p.
- [19]- Incropera, F. P. y De Witt, D. P. 1999. Fundamentos de transferencia de calor. 4ªed. México, Prentice Hall. 886p.
- [20]- Jones, H. 1997. Full Potential Modeling of Blade-Vortex Interactions. [en línea]
<<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=886793&coll=GUIDE&dl=GUIDE&CFID=4760684&CFTOKEN=27600205>> [consulta: 17 enero 2006]
- [21]- Kincaid, D. y Cheney, W. 1994. Análisis numérico. California, Addison Wesley Iberoamericana. pp. 501-686.
- [22]- Kolman, B. y Hill, D. R. 2006. Álgebra lineal. 8ªed. México, Pearson educación. pp. 536-547.
- [23]- Kudinov, P. I. 2002. CFD - Computational Fluid Dynamics. [en línea]
<<http://xoptimum.narod.ru/eng/>> [consulta: 11 febrero 2006].

- [24]- Kyle, A.1992. Grid generation and flow solution method for Euler equations on unstructured grids. [en línea]
<<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=187452&coll=GUIDE&dl=GUIDE&CFID=4760684&CFTOKEN=27600205>> [consulta: 05 enero 2006]
- [25]- Mathews, J. H. y Fink, K. D. 2000. Métodos numéricos con Matlab. 3ª ed. Madrid, Prentice Hall. 736p.
- [26]- Mills, A. F. 1997. Transferencia de calor. Santafé de Bogotá, McGraw Hill. 932p.
- [27]- Mitchell, A. R. y Griffiths, D. F. 1980. The finite difference method in partial differential equations. New York, John Wiley & Sons. pp. 238-271.
- [28]- Ordóñez, C. y Robledo, R. 1961. Mecánica de los fluidos. México, Uteha. 188p.
- [29]- Ordóñez, C. y Robledo, R. 1961. Aerodinámica teórica y experimental. México, Uteha. 256p.
- [30]- Patankar, S. V. 1980. Numerical heat transfer and fluid flow. New York, Hemisphere Publishing. 196p.
- [31]- Rotty, R. M. 1962. Introducción a la dinámica de gases. México, Herrero Hermanos. 282p.
- [32]- Sathaye, S. 2004. Lift Distributions on Low Aspect Ratio Wings at Low Reynolds Numbers. [en línea] <<http://www.wpi.edu/Pubs/ETD/Available/etd-0427104-091112/unrestricted/ssathaye.pdf>> [consulta: 21 julio 2005].
- [33]- Satoko, K. 2003. Simulation of a Subsonic Flow around a NACA0012 near its Stall Angle. [en línea] <<http://www.fsis.iis.u-tokyo.ac.jp/cfd17/paper/PD1-2.pdf>> [consulta: 12 octubre 2005].
- [34]- Shames, I. H. 1995. Mecánica de fluidos. 3ªed. Santafé de Bogota, McGraw Hill. 825p.
- [35]- The Math Works. 1995. Matlab. Madrid, Prentice Hall. 820p.

[36]- Versteeg, H. K. y Malalasekera, W. 1995. Computational fluid dynamics. New York, Longman Group. 257p.

[37]- Weinberger, H. F. 1970. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Barcelona, Reverté. pp. 53-124

ANEXOS

Anexo A : Algoritmo TDMA

La discretización de las ecuaciones gobernantes en transferencia de calor nos lleva a resolver un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. La complejidad y el tamaño de este conjunto de ecuaciones dependen de la característica del problema (1D, 2D o 3D) y el número de VC. Para resolver este sistema de ecuaciones, existen dos familias de métodos: Los métodos directos y los métodos indirectos o iterativos.

Los métodos iterativos son basados en la aplicación repetitiva del algoritmo hasta alcanzar la convergencia. Los métodos más conocidos son el Jacobi y Gauss – Seidel punto a punto, estos métodos son relativamente simples de implementar computacionalmente, sin embargo, pueden alcanzar la convergencia lentamente cuando el sistema de ecuaciones es muy grande lo que no es aconsejable en CFD.

El método TDMA es un método directo para el caso unidimensional, sin embargo, puede ser aplicado a un problema multidimensional. A continuación presentaremos detalles del algoritmo TDMA.

Algoritmo TDMA

Considere un sistema de ecuaciones que tiene la forma tri – diagonal,

$$\Phi_1 = C_1 \quad (A.1a)$$

$$-\beta_2\Phi_1 + D_2\Phi_2 - \alpha_2\Phi_3 = C_2 \quad (A.1b)$$

$$-\beta_3\Phi_2 + D_3\Phi_3 - \alpha_3\Phi_4 = C_3 \quad (A.1c)$$

$$-\beta_4\Phi_3 + D_4\Phi_4 - \alpha_4\Phi_5 = C_4 \quad (A.1d)$$

$$-\beta_n\Phi_{n-1} + D_n\Phi_n - \alpha_n\Phi_{n+1} = C_n \quad (A.1n)$$

$$\Phi_{n+1} = C_{n+1} \quad (A.1n+1)$$

En las ecuaciones de arriba Φ_1 y Φ_{n+1} son conocidos como valores de contorno. La forma general de la ecuación que represente la matriz es dada por:

$$-\beta_j \Phi_{j-1} + D_j \Phi_j - \alpha_j \Phi_{j+1} = C_j \quad (\text{A.2})$$

Las ecuaciones (A.1b-n) pueden ser escritas como:

$$\Phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \Phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2} \Phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{A.3a})$$

$$\Phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3} \Phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3} \Phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \quad (\text{A.3b})$$

$$\Phi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4} \Phi_5 + \frac{\beta_4}{D_4} \Phi_3 + \frac{C_4}{D_4} \quad (\text{A.3c})$$

•

•

•

•

$$\Phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n} \Phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n} \Phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas por eliminación ascendente y sustitución en sentido descendente. El proceso de sustitución ascendente inicia con la sustitución de la ecuación (A.3a) en la ecuación (A.3b) eliminando la variable Φ_2 de la siguiente forma,

$$\Phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \Phi_4 + \left(\frac{\beta_3 \left(\frac{\beta_2}{D_2} \Phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \quad (\text{A.4a})$$

Asumiendo la siguiente notación:

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad C'_2 = \frac{\beta_2}{D_2} \Phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{A.4b})$$

La ecuación (A.4a) puede ser escrita como:

$$\Phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \Phi_4 + \left(\frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (\text{A.4c})$$

Haciendo,

$$A_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right)$$

$$C'_3 = \left(\frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right)$$

La ecuación (A.4c) es escrita de la siguiente manera:

$$\Phi_3 = A_3 \Phi_4 + C'_3 \quad (A.5)$$

La fórmula (A.5) ahora puede ser utilizada para eliminar Φ_3 de la ecuación (A.3c); este procedimiento es repetido hasta la última ecuación (n).

Para la sustitución en la dirección descendente nosotros usamos la forma general de la relación (A.5)

$$\Phi_j = A_j \Phi_{j+1} + C'_j \quad (A.6a)$$

Donde,

$$A_j = \left(\frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \right) \quad (A.6b)$$

$$C'_j = \left(\frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \right) \quad (A.6c)$$

TDMA es un programa diseñado en Fortran, mediante este programa se puede obtener la solución de un sistema tridiagonal de ecuaciones.

A continuación se muestra el código del programa.


```

*****
Programa para resolver un sistema Tridiagonal de Ecuaciones *****
*****

* La forma de la Matriz Tridiagonal es:
*
*   D(1)  U(1)                                = C(1)
*   L(2)  D(2)  U(2)                            = C(2)
*       L(3)  D(3)  U(3)                        = C(3)
*           *
*               *
*                   *
*       L(n-1)  D(n-1)  U(n-1)                = C(n-1)
*           L(n)   D(n)                        = C(n)
*****

program TDMA
integer nd,n,i,nm1
parameter (nd=900)
real L(nd),D(nd),U(nd),C(nd),X(nd),P(0:nd),Q(0:nd),temp
write(6,*) ' Ingrese el numero de ecuaciones:'
read(*,*) n
nm1 = n - 1

write(6,*) ' Ingrese los elementos diagonales inferiores:'
read(*,*) (L(i),i=2,n)

write(6,*) ' Ingrese los elementos diagonales principales:'
read(*,*) (D(i),i=1,n)
write(6,*) ' Ingrese los elementos diagonales superiores:'
read(*,*) (U(i),i=1,nm1)
write(6,*) ' Ingrese el vector constante:'
read(*,*) (C(i),i=1,n)
L(1) = 0.0
U(n) = 0.0
*****

```

```

* Eliminación hacia adelante
do 10 i = 1,n
    temp = D(i) + L(i)*P(i-1)
    P(i) = -U(i) / temp
    Q(i) = (C(i) - L(i)*Q(i-1)) / temp
10  continue
* Sustitución hacia atrás
do 20 i = n,1,-1
    X(i) = P(i)*X(i+1) + Q(i)
20  continue
* Solucion
write(6,*) '          El Vector solución es:'
write(6,*)
write(6,21) (X(i),i = 1,n)
21  format(",25x,f12.4)
    stop
end

```

Anexo B : Cálculo De La Velocidad Máxima En Un Óvalo De Rankine.

Cuando una fuente y un sumidero de igual intensidad se colocan equidistantes del origen de coordenadas, inmersos en una corriente uniforme (u_0 x) y todo el fluido de la fuente es absorbido por el sumidero, aparece una línea de corriente divisoria, definida entre el fluido de la corriente uniforme y el fluido transferido de la fuente al sumidero, línea que puede considerarse como la intersección con el plano (x,y) de la superficie de un cilindro de forma ovoidal, conocido como óvalo de Rankine. La superposición de estos flujos da lugar a un flujo externo alrededor de un cilindro ovoidal; combinando muchas fuentes y sumideros se obtiene el flujo aproximado alrededor de un cilindro de forma arbitraria, simétrico respecto al eje Ox. El óvalo de Rankine tiene por ecuaciones, para las líneas equipotenciales y de corriente, las siguientes:

$$\Psi = UY - \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] \quad (\text{B.1.0})$$

$$\Phi = UX - \frac{m}{2\pi} [Ln.r_1 - Ln.r_2] \quad (\text{B.2.0})$$

en las cuales los datos vienen especificados en la Figura B.1

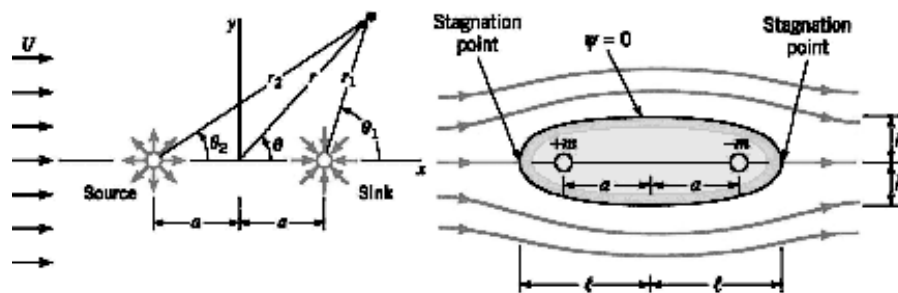


Fig. B.1- Óvalo de Rankine.

De la figura **B.1** obtenemos las siguientes relaciones:

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

reemplazando estas dos últimas ecuaciones en la ecuación B.2.0

$$\Phi = UX - \frac{m}{2\pi} \left[Ln.\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - Ln.\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$\text{Si } c = \frac{m}{2\pi}$$

$$\Phi = UX - c \left[Ln \left[\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right]^{1/2} \right] \quad (\text{B.3.0})$$

Derivando con respecto a x e y en la ecuación anterior obtenemos u y v .

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U - c \left[\frac{2a(x^2 - a^2 - y^2)}{((x+a)^2 + y^2)((x-a)^2 + y^2)} \right] \quad (\text{B.3.1})$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c \left[\frac{4(a)(y)(x)}{((x+a)^2 + y^2)((x-a)^2 + y^2)} \right] \quad (\text{B.3.2})$$

La figura B.2 muestra dos puntos (M y N) los cuales nos servirá para obtener las relaciones requeridas.

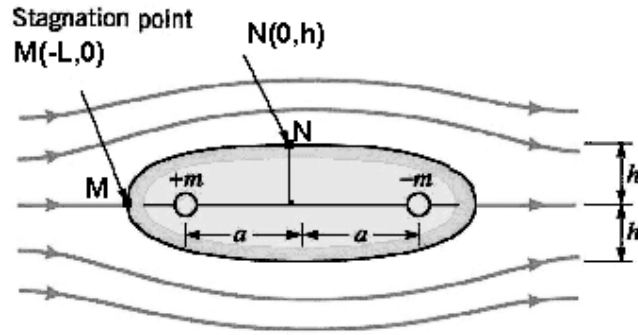


Fig. B.2- Puntos de análisis en el Óvalo de Rankine.

El punto $M(-L, 0)$ es punto de estancamiento por lo tanto $U=0$.
Remplazando estos valores en la ecuación B.3.1 Obtenemos lo siguiente.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c \left[\frac{2a(x^2 - a^2)}{(x+a)^2(x-a)^2} \right]$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c \left[\frac{2a(x-a)(x+a)}{(x+a)^2(x-a)^2} \right]$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c \left[\frac{2a}{(x^2 - a^2)} \right]$$

$$\frac{u}{c} = - \left[\frac{2a}{(L^2 - a^2)} \right] \quad (B.4.0)$$

En el punto N(0,h) $\Psi_s = 0$

Remplazando estos valores en la ecuación B.1.0, obtenemos lo siguiente:

$$\Psi = UY - c \tan^{-1} \left[\frac{2ay}{y^2 - a^2} \right]$$

$$0 = U(h) - c \tan^{-1} \left[\frac{2ah}{h^2 - a^2} \right]$$

$$\frac{U}{c} = \left(\frac{1}{h} \right) \tan^{-1} \left[\frac{2ah}{h^2 - a^2} \right] \quad (\text{B.5.0})$$

Igualando las ecuaciones B.4.0 y B.5.0, obtenemos:

$$\left[\frac{2ah}{(a^2 - L^2)} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{2ah}{h^2 - a^2} \right]$$

$$\tan \left[\frac{2ah}{(a^2 - L^2)} \right] - \left[\frac{2ah}{h^2 - a^2} \right] = 0 \quad (\text{B.6.0})$$

Esta fórmula es la que vamos a utilizar para obtener el valor de a . Como se ve esta fórmula es implícita por lo tanto para obtener el valor de a utilizaremos el método de bisección el cual es un método numérico para determinar las raíces de una ecuación con una incógnita.

```

function[b,Ea]=raiz_10X(funcion,a,c,tolerancia)

it_limite=30;

fprintf( ' It. a      b      c      f(a)  ');

fprintf( '      f(b)      f(c)\n' );

it = 0;

Y_a = feval(funcion, a );

Y_c = feval(funcion, c );

if ( Y_a*Y_c > 0 )

fprintf( '\n Detenido por que f(a)f(c) > 0 \n' );

fprintf( '\n Cambie a o´ b e intente nuevamente.\n' );

else, while 1

it = it + 1;

b = (a + c)/2;

Y_b = feval(funcion, b );

fprintf('%3.0f %10.6f, %10.6f', it, a, b );

fprintf('%10.6f, %10.6f, %10.6f, %10.6f\n', c, Y_a, Y_b, Y_c );

if ( abs(c-a)/2<=tolerancia )

fprintf( ' Se satisface la tolerancia. \n' );

break, end

if ( it>it_limite )

fprintf( 'Se excedió el numero de interacciones.\n' );

break, end

if( Y_a*Y_b <= 0 )    c = b;    Y_c = Y_b;

else                a = b;    Y_a = Y_b;

end, end, end

Ea=(abs(c-a)/2)*100;

```

Luego de encontrar el valor de a hallamos las siguientes relaciones:

$$\frac{m}{U_{\infty}a} = \left(\frac{L^2 - a^2}{2a^2} \right) \quad (\text{B.7.0})$$

Finalmente obtenemos la relación de velocidades

$$U_{\max} / U_{\infty} = 1 + \frac{2m / U_{\infty}a}{1 + h^2 / a^2} \quad (\text{B.8.0})$$